

А. И. Аркуша

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Теоретическая механика и сопротивление материалов

Издание второе, дополненное

*Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебника
для учащихся
машиностроительных специальностей
техникумов*



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1989

ББК 30.12

А 82

УДК 621.01:531.8

Рецензент — Н. В. Чернявская, канд. техн. наук, преподаватель Калининградского механического техникума

Аркуша А. И.

А82 Техническая механика: Теоретическая механика и сопротивление материалов: Учеб. для машиностр. спец. техникумов. — 2-е изд., доп. — М.: Высш. шк., 1989. — 352 с.: ил.

ISBN 5-06-000511-9

В учебнике изложены «Теоретическая механика» и «Сопротивление материалов» — первые два раздела курса «Техническая механика» — в соответствии с программой для машиностроительных специальностей техникумов. Применение основных законов, теорем, уравнений, расчетных формул иллюстрируется решением практических примеров. Учебник может быть рекомендован обучающимся без отрыва от производства в вечерних и заочных техникумах (отделениях). Учебник может использоваться также в группах учащихся немашиностроительных специальностей, связанных с эксплуатацией промышленного оборудования.

А 2004030000 (4308000000) — 267
001 (01) — 89 116 — св. план для

сред. спец. учеб. ББК 30.12
заведений 89 605

Учебное издание

Аркуша Александр Иоакимович

Техническая механика

Теоретическая механика и сопротивление материалов

Зав. редакцией А. В. Дубровский. Редактор О. Г. Подобедова. Мл. редакторы Т. Ф. Артихина, Н. М. Иванова. Художник В. Н. Хомяков. Художественный редактор Л. К. Громова. Технический редактор Т. Д. Гарина. Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 7718

Изд. № Ог-659. Сдано в набор 04.10.88. Подп. в печать 23.03.89. Формат 84 × 108¹/₃₂. Бум. тип. № 2. Гарнитура Таймс. Печать высокая. Объем 18,48 усл. печ. л. 18,48 усл. кр.-отт. 15,75 уч. изд. л. Тираж 100 000 экз. Зак. № 3987 Цена 65 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14. Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28

ISBN 5-06-000511-9

© Издательство «Высшая школа»,
1983

© Издательство «Высшая школа»,
1989, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

Второе издание учебника, в отличие от первого (1983 г.), разделено на две самостоятельные части — во вторую часть выделен раздел «Детали машин», написанный М. И. Фроловым. Первая часть содержит разделы: «Теоретическая механика» и «Сопротивление материалов». При изложении учебного материала этой части автор стремился раскрыть физический смысл рассматриваемых законов, теорем, расчетных формул и иллюстрировать их практическое применение решением задач, примерами расчета простейших элементов конструкций.

В соответствии с утвержденной в 1986 г. программой курса «Теоретическая механика» в структуру и содержание учебника внесены некоторые изменения. В частности, из раздела «Сопротивление материалов» исключен параграф о расчете статически неопределимых балок, а все вопросы, связанные с расчетами при переменных напряжениях, перенесены в раздел «Детали машин». Вместо этого материала добавлены примеры решения задач, выполнения расчетов, а после каждой главы помещены вопросы для самопроверки.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту к. т. н. Н. В. Чернявской, а также В. Р. Дворецкому и всем преподавателям, чьи замечания помогали при подготовке рукописи ко второму изданию.

Просьба к преподавателям и учащимся техникумов направлять свои критические замечания и пожелания в адрес издательства: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Последовательное развитие научно-технической революции неразрывно связано с непрерывным совершенствованием машиностроения — основы технического перевооружения всех отраслей народного хозяйства. Инженерная техническая деятельность на основе научной мысли расширяет и обновляет номенклатуру конструкционных материалов, внедряет эффективные методы повышения их прочностных свойств. Появляются новые материалы на основе металлических порошков, порошков-сплавов. Порошковая металлургия не только приводит к замене дефицитных черных и цветных металлов более дешевыми материалами, она позволяет получить совершенно новые материалы — «материалы века», которые невозможно получить традиционным путем. Кроме того, изготовление изделий из порошков — практически безотходное производство. Другое направление получения дешевых конструкционных материалов состоит в применении пластмасс, новых покрытий и т. п. Тончайшая пленка из порошковых смесей на поверхности детали, образуемая плазменным напылением, повышает надежность сопрягаемых и трущихся друг о друга деталей машин, защищает их от коррозии и существенно увеличивает их износостойкость.

Развитие машиностроения на современном этапе характеризуется широким внедрением передовых технологий, техническим перевооружением и реконструкцией действующего производства на основе комплексной механизации и автоматизации с применением автоматических манипуляторов* (промышленных роботов), встроенных систем автоматического

* От латинского «manus» — рука.

управления с использованием микропроцессоров и мини-ЭВМ.

При внедрении в промышленность новых машин широко применяется модульный принцип оборудования, т. е., например, станок или несколько станков и манипулятор. На базе этого принципа создаются и вступают в строй не отдельные машины, а их системы — автоматические линии, цехи, заводы, обеспечивающие законченный технологический процесс производства конкретного изделия. Все это, вместе взятое, позволяет при снижении затрат материалов на изготовление и общей стоимости повысить мощность, качество, производительность и экономичность потребления энергии.

Успешное развитие современного машиностроения в конечном счете зависит от качества и глубины профессиональной подготовки специалиста с высшим и средним образованием. Приобретение учащимися техникумов всех специальных знаний и навыков базируется на хорошей общетехнической подготовке, в основе которой наряду с другими лежат знания и навыки, полученные при изучении предмета «Техническая механика».

Чтобы понять работу какой-либо машины, необходимо знать, из каких частей она состоит и как они между собой взаимодействуют. А чтобы создать такую машину, нужно сконструировать и рассчитать каждую ее деталь. Третий раздел учебника и посвящен частично решению этой задачи — расчету и конструированию деталей машин общего назначения, деталей, без которых не обходится ни одна машина или механизм.

Расчеты деталей машин базируются на знании основ сопротивления материалов — науки о прочности и жесткости механических конструкций и методах их расчета. Безошибочность же всех действий в современной технической практике определяется знанием основных положений теоретической механики, в которой изучаются законы движения механических систем и общие свойства этих движений.

Каждый человек с помощью органов чувств познает разнообразный и бесконечный окружающий мир, существующий независимо от нас. Весь этот объективный мир определяется одним словом «материя». Непрерывная изменчивость материального ми-

ра — основная форма его существования — называется движением, понимаемым в самом широком смысле. «В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени»*. Действительно, в мире постоянно происходят различные явления, события, процессы, отмечая которые мы стремимся зафиксировать, где и когда они произошли. Следовательно, пространство и время — формы существования материи.

Изучением самой простой формы движения материального мира, изучением перемещения тел относительно друг друга и во взаимодействии друг с другом и занимается теоретическая механика. Перемещение тела относительно другого тела или, иначе говоря, изменение положения одного тела по отношению к другому называется *механическим движением*. Обычно теоретическая механика разделяется на три части: статику, кинематику и динамику. Статика — раздел теоретической механики, занимающийся изучением сил и условий их равновесия. Кинематика занимается изучением механического движения без учета действия сил. Динамика изучает законы механического движения в отношении их причин и следствий.

* Ленин В. И. Полн. собр. соч. Т. 18. С. 181.

Раздел первый

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ

§ 1.1. Общие сведения

Окружающие нас реальные тела отличаются многими качествами и в том числе формой, размерами, материалом, массой. Объектом изучения теоретической механики служат не реально существующие тела, а наделенные идеальными свойствами их абстрактные образы (модели)—материальная точка и абсолютно твердое тело.

Материальной точкой называют геометрическую точку, обладающую массой. Так, при решении некоторых задач механики формой и размерами реальных тел пренебрегают, считая их материальными точками. Например, при изучении движения небесных тел астрономы учитывают только массу этих тел и расстояние между ними, а форму и размеры самих тел не принимают во внимание.

Абсолютно твердым телом называют такое материальное тело, в котором расстояние между любыми двумя точками всегда остается неизменным.

Способность тел сопротивляться изменению их формы и размеров называется *жесткостью*. Следовательно, тела с абсолютно неизменными размерами и формой следует считать не только абсолютно твердыми, но и абсолютно жесткими. Любое абсолютно твердое тело рассматривают как систему материальных точек, неизменно связанных между собой, т. е. лишенных возможности перемещаться относительно друг друга. Далее абсолютно твердое тело кратко будем называть просто твердым телом.

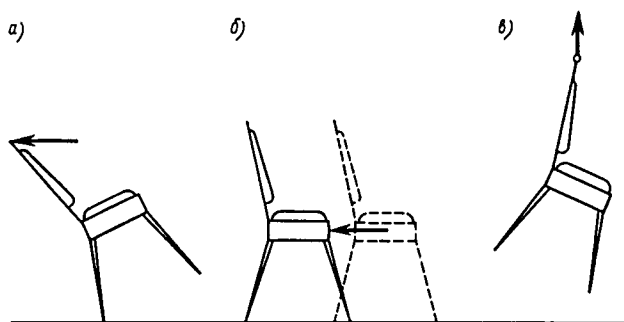


Рис. 1.1

Материальные тела находятся друг с другом во взаимодействии. Взаимодействие тел Солнечной системы обеспечивает гармонию движения планет со своими спутниками вокруг Солнца; реки приводят в движение роторы гидравлических турбин; во время бури морские волны способны разбить корабль или выбросить его на берег; подъемные краны переносят строительные конструкции, материалы и т. д. Во всех этих примерах наблюдается взаимодействие тел.

Мера механического действия одного материального тела на другое называется силой. Сила — величина векторная, она определяется, во-первых, числовым значением (модулем), во-вторых, точкой приложения (местом контакта взаимодействующих тел) и, в-третьих, направлением действия.

Численно равные силы, но приложенные к телу в разных точках и различным образом направленные, производят на тело не одинаковое по своим последствиям действие. Например, нажимая на стул рукой в верхней части спинки в горизонтальном направлении (рис. 1.1, а), можно его опрокинуть; если же нажимать на стул в горизонтальном направлении, но в точке на уровне сиденья (рис. 1.1, б), то можно сдвинуть стул, а если потянуть стул за спинку вертикально вверх (рис. 1.1, в), то стул поднимется.

Из физики известно, что непосредственное измерение числового значения сил производится с помощью различных динамометров.

В Международной системе единиц (СИ) сила выражается в ньютонах (сокращенное обозначение Н). 1 Н — небольшая сила, поэтому часто употребля-

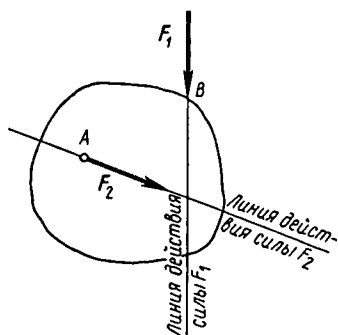


Рис. 1.2

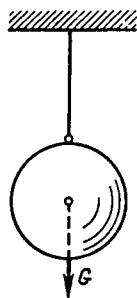


Рис. 1.3

ют кратные единицы — килоньютон ($1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$) и меганьютон ($1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$).

Как всякий вектор, силу можно изобразить графически в виде направленного отрезка (рис. 1.2). Обычно начало или конец вектора силы совпадает с точкой приложения силы; прямая, вдоль которой направлен вектор, изображающий силу, называется *линией действия силы*; стрелка на конце вектора показывает, в какую сторону действует сила. Если, например, сказано, что сила действует вертикально, то этим определено положение линии действия и необходимо еще указать, в какую сторону действует сила — вверх или вниз. Так, например, сила тяжести тел всегда направлена вертикально вниз (рис. 1.3). Далее векторы сил условимся обозначать буквами F , R , G и др., набранными жирным шрифтом, а их числовые значения (модули) будем обозначать теми же буквами, но набранными светлым курсивом (F , R , G).

Несколько сил, действующих на какое-либо одно твердое тело, называется *системой сил*. Различные системы сил, производящие на твердое тело одинаковое механическое действие, называются *эквивалентными*. Если систему сил, приложенных к твердому телу, заменить иной, но эквивалентной системой, то механическое состояние тела не нарушится. Сила, эквивалентная данной системе сил, называется ее *равнодействующей*.

Силы, действующие на твердое тело со стороны других тел, называются *внешними*. Силы, действующие на материальные точки твердого тела со

стороны других точек того же тела, называются *внутренними**.

§ 1.2. Аксиомы статики

Как указывалось выше, статика занимается изучением условий равновесия сил, но, кроме того, статика занимается задачами *сложения сил*, т. е. заменами заданных систем сил более простыми эквивалентными системами, а также задачами *разложения сил*, т. е. заменами заданной силы эквивалентной системой сил. Все теоремы и методы, с помощью которых решаются эти задачи, основываются на нескольких аксиомах.

Аксиома 1 (принцип инерции). *Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.*

Эта аксиома, сформулированная впервые Галилеем, называется принципом инерции потому, что прямолинейное и равномерное движение материальной точки, происходящее без воздействия сил, называется движением по инерции (от латинского «inertia» — бездеятельность).

Состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения точки называют *равновесием*. Так как твердое тело есть неизменяемая система материальных точек, то рассмотренная аксиома справедлива и для него. Если точка или твердое тело под действием системы сил находится в равновесии, то такую систему сил называют *уравновешенной*.

Аксиома 2 (условие равновесия двух сил). *Две силы, приложенные к твердому телу, образуют уравновешенную систему тогда и только тогда, когда (рис. 1.4) они равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны.*

Аксиома 3 (принцип присоединения и исключения уравновешенных сил). *Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней добавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.*

Иначе говоря, если к данной системе сил присоединить уравновешенные силы или из данной системы

* См. § 1.57.

сил их исключить, то вновь образованная система сил эквивалентна данной.

Следствие 1. Силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия в любую другую точку, действие силы на тело при этом не нарушится.

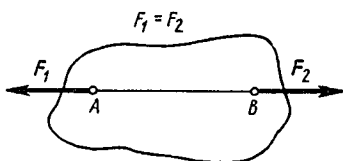


Рис. 1.4

Доказательство. Допустим, что к твердому телу в точке A приложена сила F и требуется перенести эту силу в точку B , лежащую на линии действия силы (рис. 1.5, а). Приложим к телу в точке B вдоль линии действия силы F уравновешенные силы F' и F'' (рис. 1.5, б), численно равные силе F . По аксиоме 3 действие силы F при этом не нарушится.

Согласно второй аксиоме, силы F и F'' уравновешивают друг друга, а по третьей аксиоме их можно исключить из получившейся системы сил (рис. 1.5, в). Оставшаяся сила F' , приложенная в точке B , численно равна силе F ($F = F'$) и направлена вдоль той же прямой, т. е. векторы F и F' равны ($\vec{F} = \vec{F}'$), а это равносильно тому, что сила F из точки A вдоль линии ее действия перенесена в точку B .

Следствие 1 можно коротко сформулировать так: сила, приложенная к твердому телу, — скользящий вектор.

Необходимо заметить, что это свойство вектора силы справедливо только в теоретической механике (механике абсолютно твердого тела). Допустим, к

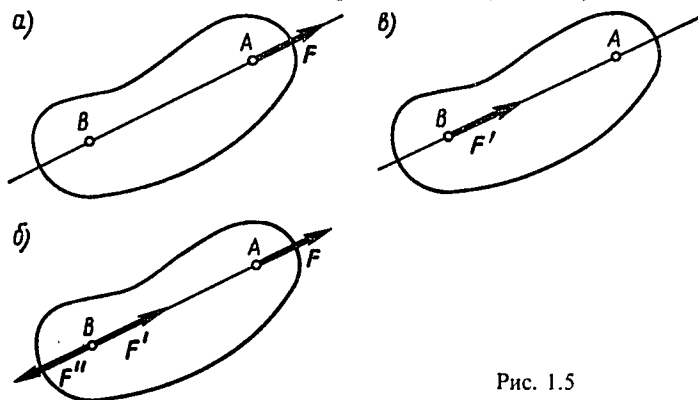


Рис. 1.5

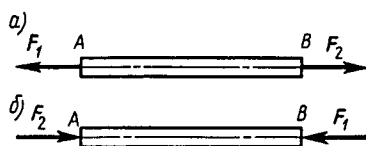


Рис. 1.6

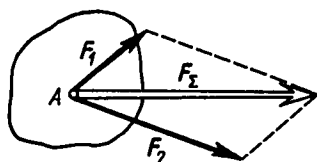


Рис. 1.7

телу AB приложены две численно равные силы F_1 и F_2 , как показано на рис. 1.6, а; если силу F_1 перенести вдоль линии ее действия из точки A в точку B , а силу F_2 — из точки B в точку A (рис. 1.6, б), то с точки зрения теоретической механики действие силы на тело не изменилось. При действии сил на реальные тела такой перенос может значительно изменить форму и размеры тела, а иногда и вообще невозможен, например в том случае, если тело AB — цепь.

Аксиома 4 (правило параллелограмма). *Две приложенные к точке тела силы имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.*

Операцию замены системы сил их равнодействующей называют *сложением сил*. Таким образом, четвертая аксиома постулирует геометрическое сложение двух сил, приложенных к точке тела, где равнодействующая F_Σ , изображаемая диагональю параллелограмма, построенного на силах F_1 и F_2 (рис. 1.7), иначе называется геометрической *суммой* этих сил.

Правило параллелограмма сил (четвертая аксиома) выражается векторным равенством

$$F_1 + F_2 = F_\Sigma. \quad (1.1)$$

Если две силы F_1 и F_2 приложены к разным точкам тела, но линии их действия лежат в одной плоскости, то, имея в виду, что сила — скользящий вектор, можно, как показано на рис. 1.8, а, силы F_1 и F_2 из точек A и B по линиям действия перенести в точку C их пересечения (модули перенесенных векторов указаны в скобках), а затем сложить по правилу параллелограмма.

Из правила параллелограмма может быть получено правило треугольника сложения двух сил, действующих на тело в одной плоскости (рис. 1.8, б).

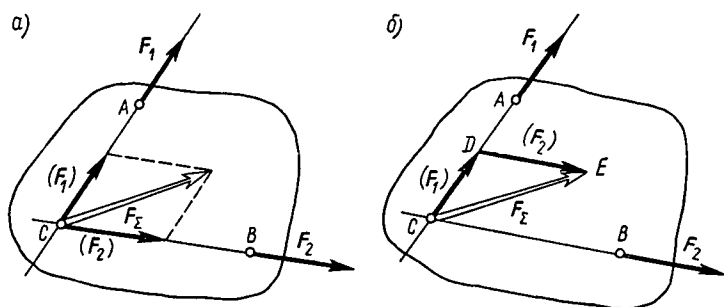


Рис. 1.8

Проведя линии действия заданных сил F_1 и F_2 и определив точку C пересечения этих линий, строим треугольник CDE , в котором $CD = F_1$ и $DE = F_2$, а $CE = F_\Sigma$, причем сторона CE называется замыкающей стороной силового треугольника.

Правило треугольника формулируется так: *равнодействующая двух сил, приложенных к точке тела, равна замыкающей стороне треугольника, две другие стороны которого равны данным силам.*

Основываясь на правиле параллелограмма, можно поставить и обратную задачу — задачу разложения данной силы на две составляющие, приложенные к той же точке. Для решения этой задачи достаточно на заданном векторе силы, как на диагонали, построить параллелограмм, стороны которого и будут искомыми составляющими. Чтобы задачу разложения силы на две составляющие сделать определенной (на заданной диагонали можно построить бесчисленное количество параллелограммов), кроме силы, которую требуется разложить, необходимо задать дополнительные условия, например направления искоемых составляющих. В такой постановке задача разложения силы по правилу параллелограмма встречается чаще всего.

Следствие 2 (теорема о равновесии трех сил). *Если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, образуют уравновешенную систему, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

Доказательство. На твердое тело в точках A , B и C действуют силы F_1 , F_2 и F_3 (рис. 1.9, а), линии их

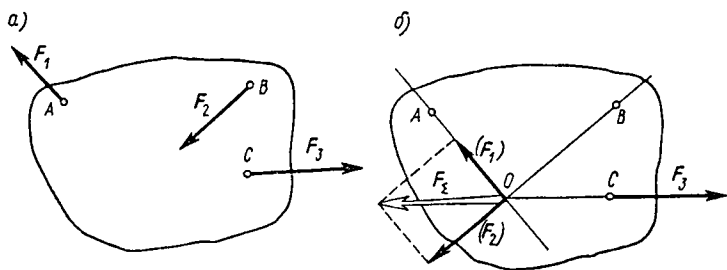


Рис. 1.9

действия лежат в одной плоскости; силы образуют уравновешенную систему (тело под действием этих сил находится в равновесии).

Так как силы лежат в одной плоскости, то линии действия двух любых из них обязательно пересекутся. Проведем линии действия сил F_1 и F_2 до пересечения в точке O , перенесем в нее эти силы (рис. 1.9, б) и сложим по правилу параллелограмма. Равнодействующая F_Σ эквивалентна силам F_1 и F_2 . Таким образом, теперь на тело действуют две силы: F_Σ и F_3 , но равновесие тела не нарушилось, значит силы F_Σ и F_3 уравнивают друг друга. Согласно аксиоме 2, эти силы действуют вдоль одной прямой; следовательно, линия действия силы F_3 проходит также через точку O — точку пересечения линий действия двух других сил. Теорема доказана. Пересечение линий действия трех сил в одной точке — необходимое условие равновесия трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, но не достаточное. Линии действия трех сил могут пересекаться в одной точке, но система сил может и не быть уравновешенной.

Аксиома 5 (закон действия и противодействия). Силы взаимодействия двух твердых тел друг на друга равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

В физике эта аксиома известна как третий закон Ньютона. Пятая аксиома имеет важное значение в механике. Если тело 1 действует на тело 2 с силой F_{12} (рис. 1.10), то тело 2 действует на тело 1 с точно такой же по модулю силой F_{21} , но направленной в прямопротивоположную сторону. Хотя силы F_{12} и F_{21} равны по модулю и действуют вдоль одной

прямой в противоположные стороны, они не уравнивают друг друга, так как приложены к разным телам.

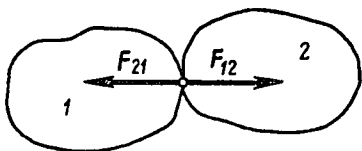


Рис. 1.10

Аксиома 6 (принцип отвердевания). Если деформируемое тело нахо-

дится в равновесии, то равновесие этого тела не нарушится, если, не изменяя формы, размеров, положения в пространстве, оно превратится в абсолютно твердое тело, т. е. затвердеет.

Из этого принципа следует, что условия, необходимые и достаточные для равновесия данного абсолютно твердого тела, необходимы, но не достаточны для равновесия деформируемого тела, по форме и размерам тождественного с данным. Например, если под действием сил резиновое тело находится в равновесии, то равновесие сохранится, когда это тело станет абсолютно твердым. Однако если под действием сил абсолютно твердое тело находилось в равновесии, то, став резиновым, оно теряет равновесное состояние.

§ 1.3. Связи и их реакции

Твердое тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении. В качестве примера свободного тела приведем летящий воздушный шар или ракету в космосе. Твердое тело называется *несвободным*, если его перемещение в пространстве ограничено какими-либо другими телами.

Все тела, которые так или иначе ограничивают перемещение данного тела, называются его *связями*. Например, стул, стоящий на полу (см. рис. 1.1), — несвободное тело; перемещение стула ограничивается полом, для стула пол является связью. Движение шара (см. рис. 1.3) ограничивается нитью; следовательно, для шара связью служит нить.

Как отмечалось выше (см. Введение), в природе нет абсолютного покоя, и тела, стремясь под действием внешних сил перемещаться в пространстве, сами действуют на препятствующие этому перемещению связи. Например, стул (см. рис. 1.1), находясь

под действием силы тяжести, давит на пол, а шар (см. рис. 1.3) натягивает нить. Согласно пятой аксиоме, одновременно с возникновением действия тела на связь возникает равная по модулю, но направленная в противоположную сторону сила противодействия связи, приложенная к телу. Действие связи на тело называется силой реакции связи или реакцией связи [от латинского «ге...» (против) + «actio» (действие), т. е. ответ на внешнее действие].

Таким образом, на несвободное тело действуют две группы внешних сил: *заданные силы и реакции связей*. К заданным относятся все силы, кроме реакций связей. Чаще всего заданные силы являются *активными*, т. е. силами, которые могут вызвать движения тел, например сила тяжести, сила тяги, сила электрического взаимодействия и т. д.

При решении задач статики активные силы, как правило, бывают наперед заданными, а реакции связей неизвестны и их требуется определить. *Задача определения реакций связей — одна из основных задач статики*. Определяя реакции связей, необходимо иметь в виду, что они приложены к телу в точках соприкосновения тела со связью и направлены в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Направление реакции связи зависит от вида связи, ее расположения относительно тела и характера соприкосновения или соединения связи с телом.

Рассмотрим некоторые разновидности связей и правила определения их реакций.

Свободное опирание тела о связь. Примеры этой разновидности связи показаны на рис. 1.11, где тело изображено в виде бруска, а связь заштрихована. Поверхности тела и связи в местах их соприкосновения условимся считать абсолютно гладкими (идеальными). Во всех случаях связь препятствует движению тела в направлении, перпендикулярном опорной поверхности. Поэтому при опирании тела о связь своим ребром реакция связи направлена перпендикулярно плоской (R_A) или криволинейной (R_B) поверхности связи; при опирании тела о ребро связи своей поверхностью (плоской или криволинейной) реакция связи направлена перпендикулярно поверхности тела (R_C и R_D); при опирании поверхности тела о поверхность связи реакция связи направлена перпен-

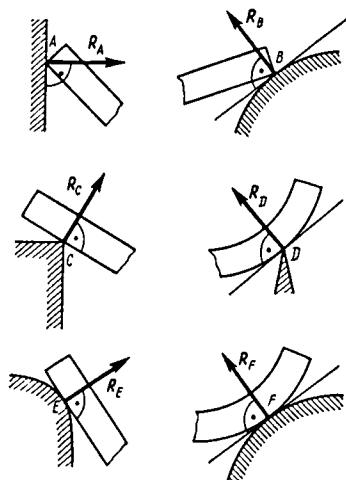


Рис. 1.11

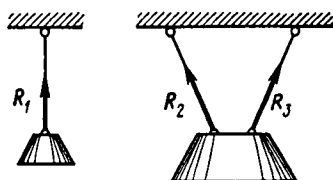


Рис. 1.12

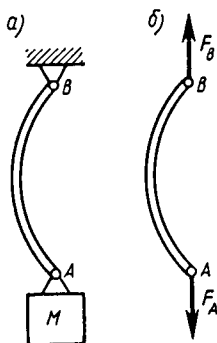


Рис. 1.13

дикулярно общей касательной обеих поверхностей (R_E и R_F).

Гибкая связь. Примерами такой связи служат нити или цепи, которые условно считаем абсолютно нерастяжимыми и невесомыми (идеальными). Гибкая связь препятствует передвижению тела только в натянутом состоянии. Поэтому реакции нитей или цепей всегда направлены вдоль самих связей в сторону от тела к связи (R_1 , R_2 , R_3 на рис. 1.12).

Стержневая связь. Вместо гибкой связи часто употребляют абсолютно жесткие (недеформируемые) и условно принимаемые невесомыми стержни с шарнирными креплениями на концах. Шарнирные крепления позволяют стержню занимать положение, при котором действие на него со стороны удерживаемого тела всегда направлено по прямой, проходящей через оси шарниров (вспомните аксиому 2). Например, груз M , прикрепленный к невесомому криволинейному стержню AB (в точках A и B — цилиндрические шарниры), находится в равновесии в положении, показанном на рис. 1.13, а, так как только в этом

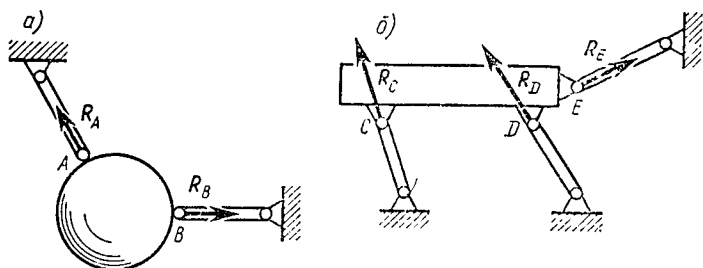


Рис. 1.14

положении на стержень действует уравновешенная система двух сил: F_A и F_B (рис. 1.13, б).

Таким образом, реакции стержневых связей направлены вдоль прямой, проходящей через оси концевых шарниров. Обычно стержни делают прямолинейными и в этих случаях реакции направлены вдоль стержня. Если стержень растянут, то его реакция направлена в сторону от тела к стержню (R_A , R_B , R_E на рис. 1.14, а, б). Если стержень сжат, то его реакция направлена в сторону от стержня к телу (R_C , R_D на рис. 1.14, б). Как видим, в отличие от гибкой связи прямолинейные стержни могут воспринимать со стороны тела не только растягивающие, но и сжимающие силы.

При решении подобных задач заранее не всегда можно определить какой из стержней растянут, а какой — сжат. Поэтому предполагают, что все стержни растянуты, а в результате решения получаем значения реакций сжатых стержней отрицательными, так как на самом деле эти реакции имеют направление, противоположное предполагаемому.

Шарнирно-подвижная опора представляет собой видоизменение свободного опирания. Тело (брус) опирается на опорную поверхность не непосредственно, а через шарнир, поставленный на катки (рис. 1.15, а, б). Такая опора препятствует перемещению тела только в направлении, перпендикулярном опорной поверхности катков (вдоль опорной поверхности шарнир вместе с прикрепленным к нему телом может перемещаться).

Реакция R шарнирно-подвижной опоры направлена по пересекающей ось шарнира прямой, перпендикулярной его опорной поверхности (рис. 1.15).

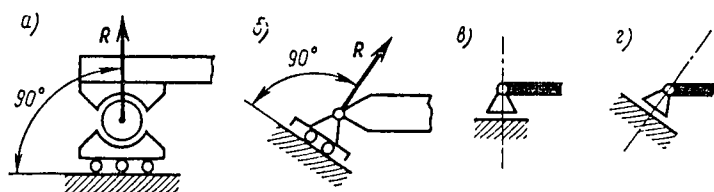


Рис. 1.15

Условное обозначение шарнирно-подвижной опоры согласно ГОСТ 2.770—68* показано на рис. 1.15, в, г.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.16) дает возможность телу свободно поворачиваться около шарнира, но препятствует поступательному перемещению тела в любом направлении, перпендикулярном оси шарнира. Следовательно, нагруженное тело может действовать на шарнирно-неподвижную опору в любом направлении, и направление реакции шарнирно-неподвижной опоры поэтому, как правило, заранее не известно — реакция R (рис. 1.16, а) может быть направлена в любую сторону в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Таким образом, при определении реакции шарнирно-неподвижной опоры возникают две неизвестные величины — модуль силы R и ее направление, т. е. угол, образуемый линией действия силы с какой-либо заданной или выбранной линией (осью координат), например угол α на рис. 1.16, а. Воспользовавшись тем, что согласно четвертой аксиоме любую силу можно представить в виде двух составляющих, направление которых задано заранее, обычно заменяют искомую реакцию R двумя составляющими R_x и R_y , перпендикулярными друг другу (рис. 1.16, б). По найденным составляю-

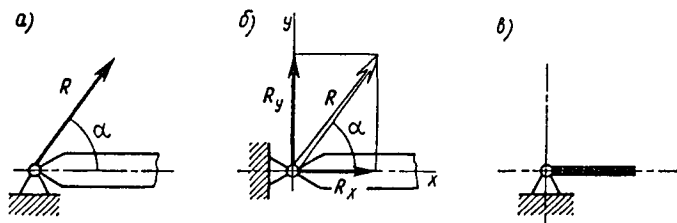


Рис. 1.16

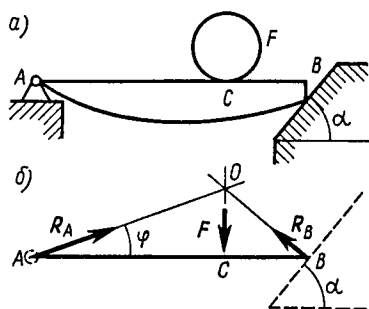


Рис. 1.17

щим R_x и R_y легко найти реакцию R (подробно об этом см. в § 1.4). На рис. 1.16, в показано условное изображение шарнирно-неподвижной опоры согласно ГОСТ 2.770—68*.

Если же на тело кроме реакции R шарнирно-неподвижной опоры действуют еще две непараллельные силы, то реакция R может быть найдена с помощью теоремы о равновесии трех сил (см. следствие 2).

Представим, что на горизонтально расположенный брус AB , собственной массой которого пренебрегаем, действует вертикальная нагрузка F , приложенная в точке C бруса (рис. 1.17, а). Левый конец бруса A прикреплен к опоре шарниром, а правый B опирается на гладкую наклонную плоскость.

Изобразим брус схематично отрезком AB , как на рис. 1.17, б, и приложим к нему в точке C вертикальную силу F . В точке B со стороны наклонной плоскости к брусу приложена ее реакция R_B , направленная перпендикулярно плоскости (см. § 1.3); линии действия сил F и R_B пересекаются в точке O . Кроме этих сил на брус действует еще одна сила — реакция шарнирно-неподвижной опоры. А так как брус находится в равновесии, то линия действия третьей силы также пройдет через точку O , т. е. реакция R шарнирно-неподвижной опоры направлена вдоль отрезка AO .

Примененный здесь метод рассуждения называется *принципом освобождения тела от связей и замены связей их реакциями*.

Вопросы для самопроверки

1. Какие системы сил называются эквивалентными?
2. В чем сходство между равнодействующей и уравнивающей силой и чем они отличаются друг от друга?
3. Если две непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, приложены в разных точках твердого тела, можно ли при их сложении применить правило параллелограмма (или треугольника) и в какой точке будет приложена равнодействующая этих сил?
4. Можно ли силу в 50 Н разложить на две силы, например, по 200 Н?
5. Какие разновидности связей рассматриваются в статике?

ГЛАВА 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 1.4. Сложение двух сил, приложенных в точке тела

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*. Если силы сходящейся системы приложены к разным точкам тела (рис. 1.18, а), то, по первому следствию из аксиом статики, каждую силу можно перенести в точку O пересечения линий действия и получить эквивалентную систему сил, приложенных к одной точке (рис. 1.18, б).

Две силы, приложенные к одной точке тела, образуют простейшую плоскую систему сходящихся сил (две пересекающиеся прямые всегда лежат в одной плоскости). Сложение двух сходящихся сил, или, иначе говоря, определение их геометрической суммы — равнодействующей, производится согласно четвертой аксиоме (см. § 1.2) по правилу параллелограмма.

Задачу сложения двух сходящихся сил можно

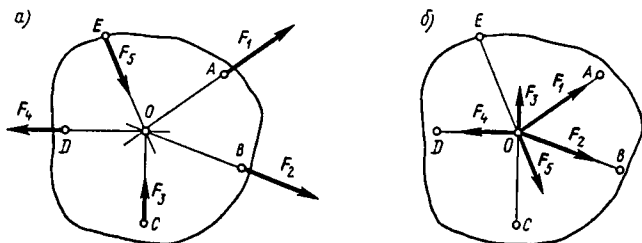


Рис. 1.18

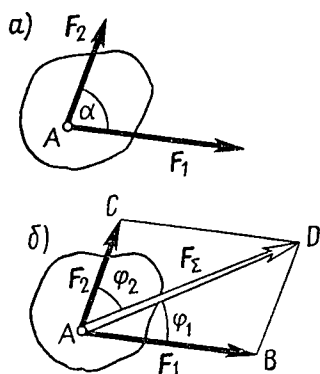


Рис. 1.19

решить либо графическим методом (построением), либо вычислением.

При графическом решении с помощью масштабной линейки, угольника, циркуля и транспортира строят параллелограмм сил. При построении необходимо соблюдать одинаковую пропорцию между модулями заданных сил и длинами отрезков, с помощью которых эти силы изображаются. Например, если различные силы F_k изображаются

отрезками соответствующих длин l_k , то во всех случаях должна соблюдаться зависимость

$$F_k = \mu_F l_k, \quad (1.2)$$

где μ_F — постоянный для данного построения коэффициент пропорциональности, называемый *масштабом сил*; он представляет собой число единиц силы в единице длины отрезка и выражается в Н/мм, кН/мм и т. д.

При решении задачи вычислением используют соответствующие геометрические теоремы и тригонометрические зависимости.

Пусть даны приложенные к точке A какого-либо тела две силы F_1 и F_2 , линии действия которых пересекаются под углом α (рис. 1.19, а), и требуется определить их равнодействующую F_Σ — найти ее модуль и направление.

Графическое решение. Назначив масштаб сил μ_F , определив длины отрезков $l_1 = AB$ и $l_2 = AC$, соответствующие модулям заданных сил F_1 и F_2 ($l_1 = AB = F_1/\mu_F$ и $l_2 = AC = F_2/\mu_F$), строим векторы $F_1 = AB$ и $F_2 = AC$ под углом α , который откладываем по транспортиру (рис. 1.19, б). Проводим $CD \parallel AB$ и $BD \parallel AC$. В образовавшемся параллелограмме $ABDC$ диагональ $AD = F_\Sigma$. Измерив длину отрезка AD и умножив на масштаб сил, найдем модуль равнодействующей F_Σ ($F_\Sigma = \mu_F AD$). Направление F_Σ фиксиру-

ют углом $\varphi_1 = (\mathbf{F}_1, \hat{\mathbf{F}}_\Sigma)$ и $\varphi_2 = (\mathbf{F}_2, \hat{\mathbf{F}}_\Sigma)$, их значения находим с помощью транспортира.

Решение вычислением. Исходя из данных условий, на векторах \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 без строгого соблюдения масштаба сил строим параллелограмм $ABDC$ с диагональю AD , которая изображает искомую равнодействующую \mathbf{F}_Σ (рис. 1.19, б). Учитывая, что длины сторон и диагонали параллелограмма пропорциональны модулям сил, из ΔABD по теореме косинусов находим

$$F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 F_2 \cos \hat{ABD}},$$

где $\hat{ABD} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$. Через исходные данные модуль равнодействующей

$$F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha}. \quad (1.3)$$

Направление равнодействующей \mathbf{F}_Σ , т. е. углы $\varphi_1 = (\mathbf{F}_1, \hat{\mathbf{F}}_\Sigma)$ и $\varphi_2 = (\mathbf{F}_2, \hat{\mathbf{F}}_\Sigma)$, определяется по теореме

синусов из того же ΔABD . Ввиду того что $\hat{ADB} = \varphi_2$

и $\hat{ABD} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$,

$$F_1 / \sin \varphi_2 = F_2 / \sin \varphi_1 = F_\Sigma / \sin \alpha,$$

откуда

$$\sin \varphi_1 = \frac{F_2 \sin \alpha}{F_\Sigma} \quad \text{и} \quad \sin \varphi_2 = \frac{F_1 \sin \alpha}{F_\Sigma}. \quad (1.4)$$

В зависимости от некоторых значений угла $\alpha = (\mathbf{F}_1, \hat{\mathbf{F}}_2)$ возникают четыре частных случая.

1-й случай. Если $\alpha = 0$, то $\cos \alpha = \cos 0 = 1$ и из формулы (1.3) следует

$$F_\Sigma = F_1 + F_2. \quad (1.5)$$

Так как $\sin \alpha = \sin 0 = 0$, то из формулы (1.4)

находим

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Таким образом, *равнодействующая двух сил, направленных вдоль одной прямой и в одну сторону, действует в ту же сторону и ее модуль равен сумме модулей составляющих сил.*

Эти результаты просто получить и непосредственно из рис. 1.20, а.

2-й случай. Если $\alpha = \pi/2 = 90^\circ$, то $\cos \alpha = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin \alpha = \sin \pi/2 = 1$ и формула (1.3) приобретает вид

$$F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad (1.6)$$

а формула (1.4) — вид

$$\sin \varphi_1 = F_2/F_\Sigma \text{ и } \sin \varphi_2 = F_1/F_\Sigma. \quad (1.7)$$

Формулы (1.6) и (1.7) могут быть получены и непосредственно из рис. 1.20, б.

3-й случай. Если $\alpha = \pi = 180^\circ$, то $\cos \alpha = \cos \pi = -1$, $\sin \alpha = \sin \pi = 0$ и из формулы (1.3) следует

$$F_\Sigma = F_1 - F_2, \quad (1.8)$$

а из формул (1.4) находим $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = \pi = 180^\circ$.

Значит, *равнодействующая двух сил, направленных вдоль одной прямой, но в противоположные стороны, действует в сторону большей силы и ее модуль равен разности модулей составляющих сил.*

Непосредственно из рис. 1.20, в получаем тот же результат.

4-й случай. Он возникает при сложении двух равных по модулю сил. Допустим, что $F_1 = F_2 = F$, тогда формула (1.3) примет вид

$$F_\Sigma = F \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$$

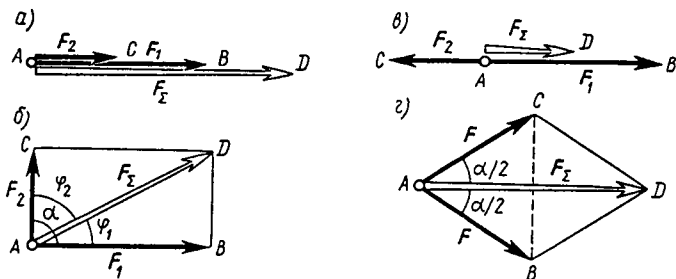


Рис. 1.20

или окончательно (исходя из известной зависимости $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1 + \cos \alpha)/2}$)

$$F_{\Sigma} = 2F \cos(\alpha/2). \quad (1.9)$$

Из формулы (1.4) с учетом выражения (1.9), а также зависимости $\sin \alpha = 2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$ получим

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = \sin(\alpha/2),$$

откуда следует, что $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha/2$.

Легко видеть, что при сложении двух равных по модулю сил, приложенных к точке под углом α друг к другу, образуется ромб (рис. 1.20, з), и полученные выше результаты вытекают непосредственно из его геометрических свойств.

§ 1.5. Сложение плоской системы сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия

Рассмотрим систему сил F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 , приложенных в точке A (рис. 1.21, а). Требуется найти их равнодействующую.

Применив правило силового треугольника, сло-

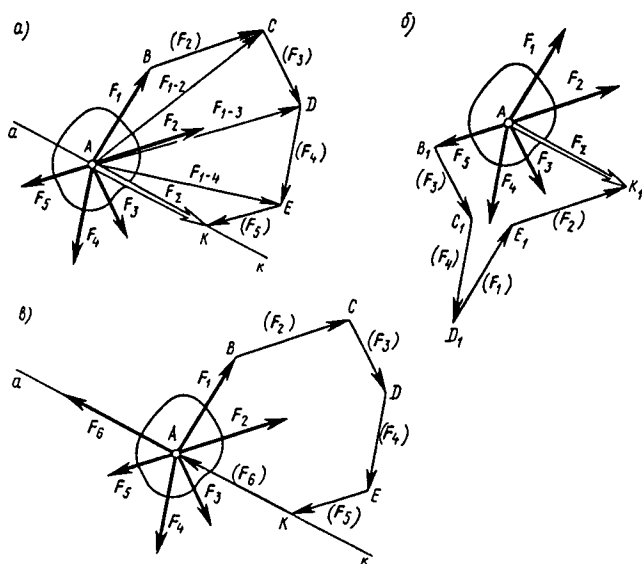


Рис. 1.21

жим силы F_1 и F_2 . Для этого из конца вектора $\overline{AB} = F_1$ отложим вектор $\overline{BC} = F_2$ и, соединив точки A и C , получим геометрическую сумму (равнодействующую) сил F_1 и F_2 :

$$\overline{AC} = F_{1-2} = F_1 + F_2.$$

Теперь сложим силу F_{1-2} с силой F_3 . Для этого из конца вектора $\overline{BC} = F_2$ отложим вектор $\overline{CD} = F_3$ и, соединив точки A и D , получим равнодействующую трех сил:

$$\overline{AD} = F_{1-3} = F_{1-2} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3.$$

Далее, отложив $\overline{DE} = F_4$ и соединив точки A и E , получим равнодействующую четырех сил:

$$\overline{AE} = F_{1-4} = F_{1-3} + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4.$$

Наконец, отложив $\overline{EK} = F_5$ и соединив точки A и K , получим искомую равнодействующую:

$$\overline{AK} = F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5.$$

Из рис. 1.21, *а* видим, что для получения этого окончательного результата не обязательно определять промежуточные равнодействующие F_{1-2} , F_{1-3} и т. д., а достаточно из конца вектора $\overline{AB} = F_1$ отложить вектор $\overline{BC} = F_2$, из конца вектора \overline{BC} отложить вектор $\overline{CD} = F_3$ и т. д., а затем «замкнуть» получившийся силовой многоугольник вектором $\overline{AK} = F_{\Sigma}$. При этом вектор равнодействующей F_{Σ} имеет начало в начале первой силы и конец — в конце последней силы.

Заметим, что порядок построения сторон силового многоугольника не влияет на окончательный результат. Например, на рис. 1.21, *б* силовой многоугольник $AB_1C_1D_1E_1K_1$ замыкается вектором $\overline{AK_1} = \overline{AK}$, хотя порядок сложения векторов здесь иной:

$$\overline{AK_1} = F_{\Sigma} = F_5 + F_3 + F_4 + F_1 + F_2.$$

Определение равнодействующей системы сходящихся сил — необходимый этап также и для решения

задачи уравнивания заданной системы. Чтобы уравновесить систему сил, достаточно к ней добавить еще одну силу, численно равную равнодействующей, но направленную в противоположную сторону. Например, требуется уравновесить систему пяти сил (рис. 1.21, а). Для этого, построив силовой многоугольник $ABCDEK$, вдоль линии ak добавим силу F_6 , численно равную равнодействующей F_Σ , но противоположно направленную (рис. 1.21, б). Образовавшаяся система сходящихся сил ($F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$) уравновешена. В такой уравновешенной системе любая из сил оказывается уравнивающей по отношению к остальным.

Таким образом, если построить силовой многоугольник уравновешенной системы сил (рис. 1.21, б), то он получится замкнутым, т. е. замыкающий вектор $F_\Sigma = 0$, так как конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого.

Следовательно, замкнутый силовой многоугольник выражает в геометрической форме необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил: *система сходящихся сил уравновешена тогда и только тогда, когда силовой многоугольник замкнут.*

Геометрическое условие равновесия (замкнутый силовой многоугольник) широко используется при решении задач статики.

Пусть, например, требуется определить реакции связей шара, удерживаемого нитью AB на наклонной плоскости с углом подъема α (рис. 1.22, а). Нить образует с наклонной плоскостью угол β .

На шар кроме силы тяжести G , приложенной в центре шара, действуют еще две силы: R_K — реакция наклонной плоскости, направленная перпендикулярно ей, и R_A — реакция нити, направленная вдоль нее, т. е. по линии AB . Под действием трех сил шар неподвижен, значит система сил уравновешена и линии

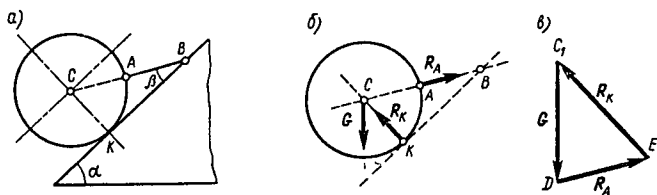


Рис. 1.22

действия этих трех сил пересекаются в одной точке C — центре шара.

Изобразив силу тяжести шара в виде вектора G и освободив шар от связей, заменим связи их реакциями (рис. 1.22, б). Как было установлено, три силы (G , R_A и R_K) образуют уравновешенную систему, поэтому силовой многоугольник (в данном случае — треугольник) должен быть замкнутым. Из произвольной точки C_1 (рис. 1.22, в) построим вектор $\overline{C_1D} = G$. Направление сил R_A и R_K известно, поэтому проведем из точки C_1 луч, перпендикулярный наклонной плоскости, а из точки D — луч, параллельный нити AB ; лучи пересекутся в точке E , и мы получим замкнутый треугольник C_1DE , в котором $\overline{DE} = R_A$ — реакция нити, а $\overline{EC} = R_K$ — реакция наклонной плоскости.

Если углы α и β на рис. 1.22, а построены по транспортиру, а треугольник C_1DE — после выбора масштаба сил для вектора $\overline{C_1D} = G$, то задача решена графически.

Задачу легко решить и вычислением по теореме синусов, так как по значениям углов α и β на рис. 1.22, а нетрудно найти углы треугольника C_1DE на рис. 1.22, в.

Пример 1.1. Если $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ и $G = 60$ Н, то $R_K = 66,9$ Н, а $R_A = 49$ Н. Проверьте правильность этих ответов.

§ 1.6. Определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций. Аналитическое условие равновесия

Вместо построения силового многоугольника равнодействующую системы сходящихся сил более точно и значительно быстрее находят вычислением с помощью метода проекций, который обычно называется аналитическим.

Проекцией вектора F на ось называется длина направленного отрезка оси, заключенного между двумя перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора F . Договоримся обозначать буквой O начало отсчета значений величин по оси, а буквами x , y , z — наименования осей; положительный отсчет вести по направлению от O к x (к y или к z),

а отрицательный отсчет — в противоположную сторону.

Пусть заданы сила F и ось Ox (рис. 1.23, а). Проекция силы F на ось Ox выражена длиной отрезка ab , где, как видно из рисунка, a — проекция точки A начала вектора $F=AB$ и b — проекция точки B конца вектора на ось. Отсчет длины проекции (от a к b) в данном случае совпадает с положительным направлением оси, значит, проекция ab положительна.

Проекцию силы F на ось условимся обозначать той же буквой F с добавлением индекса, обозначающего наименование оси, на которую сила проецируется, т. е. проекцию силы F на ось x обозначим F_x . Если обозначение силы имеет какой-нибудь индекс, то и у обозначения проекции этот индекс сохраняется; например, проекции силы F_1 или F_2 обозначаются соответственно F_{1x} или F_{2x} .

Из рис. 1.23, а видно, что $F_x = ab$, но $ab = AC$, а из $\triangle ACB$ следует, что $AC = F \cos \alpha$. Таким образом,

$$F_x = F \cos \alpha, \quad (1.10)$$

т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля этой силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

Выражение (1.10) проекции силы через ее модуль является общим для какого угодно расположения силы относительно оси. Например, сила F_1 образует (рис. 1.23, б) с положительным направлением оси угол α , который $\pi/2 < \alpha < \pi$. Следовательно,

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha = F_1 \cos (\pi - \beta) = -F_1 \cos \beta.$$

Итак, проекция F_{1x} отрицательна, если отсчет длины проекции от точки a_1 к точке b_1 противоположен положительному направлению оси.

Если $\alpha = 0$ (рис. 1.23, в), т. е. сила параллельна оси и направлена в сторону положительного отсчета оси,

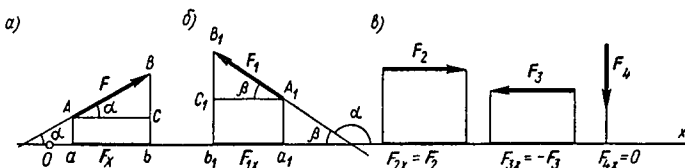


Рис. 1.23

то $\cos 0 = 1$ и поэтому $F_{2x} = F_2 \cos 0 = F_2$; если угол $\alpha = \pi$, т. е. сила параллельна оси, но направлена противоположно положительному отсчету оси, то $\cos \pi = -1$ и $F_{3x} = F_3 \cos \pi = -F_3$; если угол $\alpha = \pi/2$, т. е. сила перпендикулярна оси, то $\cos(\pi/2) = 0$ и $F_{4x} = F_4 \cos(\pi/2) = 0$.

При решении задач, в которых фигурирует плоская система сходящихся сил, как правило, необходимо определять проекции сил на две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy . Все сказанное о проекциях на ось Ox справедливо и для проекций сил на ось Oy .

Так, если сила F_k (рис. 1.24) образует с положительным направлением осей x и y соответственно углы $\alpha_x = (\hat{F}_k, x)$ и $\alpha_y = (\hat{F}_k, y)$, то

$$F_{kx} = F_k \cos \alpha_x \quad \text{и} \quad F_{ky} = F_k \cos \alpha_y. \quad (1.11)$$

По заданным проекциям силы на оси может быть определен и сам вектор силы (ее модуль и направление).

Допустим, проекции F_{kx} и F_{ky} силы известны, тогда из $\triangle ACB$ (рис. 1.24) видно, что модуль силы

$$F_k = \sqrt{F_{kx}^2 + F_{ky}^2}. \quad (1.12)$$

Чтобы найти углы $(\hat{F}_k, x) = \alpha_x$ и $(\hat{F}_k, y) = \alpha_y$, образуемые направлением вектора F_k с осями x и y , определим сначала значения

$$\cos \alpha_x = F_{kx}/F_k \quad \text{и} \quad \cos \alpha_y = F_{ky}/F_k, \quad (1.13)$$

а затем по таблицам с помощью счетной логарифмической линейки или электронного микрокалькулятора определим углы α_x и α_y . Заметим, что при определении углов α_x и α_y на счетной логарифмической линейке удобнее находить не косинусы этих углов, а их синусы:

$$\sin \alpha_x = F_{ky}/F_k \quad \text{и} \quad \sin \alpha_y = F_{kx}/F_k.$$

Пример 1.2. Если для силы F проекция $F_x = 12$ Н и $F_y = -16$ Н, то $F = 20$ Н, а $\alpha_x = (F, x) = 53^\circ 8'$ и $\alpha_y = (F, y) = 143^\circ 8'$. Проверьте

правильность ответа, выполнив необходимые построения и вычисления.

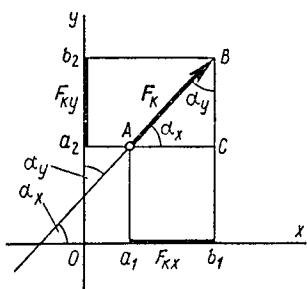


Рис. 1.24

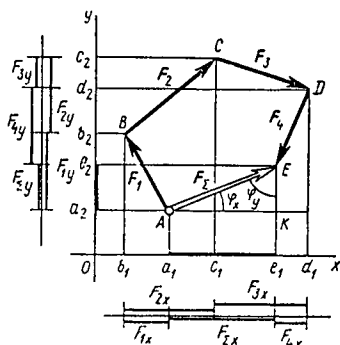


Рис. 1.25

Рассмотрим теперь определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций.

Допустим, что для заданной системы сходящихся сил построен многоугольник $ABCDE$, в котором вектор $AE = F_{\Sigma}$ — искомая равнодействующая данной системы (рис. 1.25). Выбрав систему координатных осей x и y в плоскости силового многоугольника, спроецируем его на эти оси.

Проекции сил на ось x :

$$\begin{aligned} \text{пр}_x(F_1) &= a_1 b_1 = F_{1x}; \quad \text{пр}_x(F_2) = b_1 c_1 = F_{2x}, \\ \text{пр}_x(F_3) &= c_1 d_1 = F_{3x} \quad \text{и} \quad \text{пр}_x(F_4) = d_1 e_1 = F_{4x}. \end{aligned}$$

Проекции сил на ось y :

$$\begin{aligned} \text{пр}_y(F_1) &= a_2 b_2 = F_{1y}; \quad \text{пр}_y(F_2) = b_2 c_2 = F_{2y}, \\ \text{пр}_y(F_3) &= c_2 d_2 = F_{3y} \quad \text{и} \quad \text{пр}_y(F_4) = d_2 e_2 = F_{4y}. \end{aligned}$$

Для наглядности проекции на рис. 1.25 показаны рядом с осями, несколько смещенными относительно них, причем положительные проекции вынесены выше (проекция F_{1x}) или правее (проекция F_{1y}), а отрицательные соответственно ниже или левее.

Одновременно с проецированием сторон силового многоугольника, равных заданным силам, получены и проекции равнодействующей:

$$\text{пр}_x(F_{\Sigma}) = a_1 e_1 = F_{\Sigma x} \quad \text{и} \quad \text{пр}_y(F_{\Sigma}) = a_2 e_2 = F_{\Sigma y}.$$

Из рис. 1.25 видно, что

$$a_1 e_1 = -a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 d_1 - d_1 e_1$$

и

$$a_2 c_2 = a_2 b_2 + b_2 c_2 - c_2 d_2 - d_2 e_2$$

или

$$\left. \begin{aligned} F_{\Sigma x} &= -F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} - F_{4x}, \\ F_{\Sigma y} &= F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} - F_{4y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Равенства (1.14) короче записывают так:

$$F_{\Sigma x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad F_{\Sigma y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad (1.15)$$

где Σ — знак суммы, а индекс k принимает последовательно значения от 1 до n по числу сходящихся сил, равнодействующую которых определяем.

Выше отмечалось, что по проекциям силы могут быть найдены ее модуль и направление. Следовательно, модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \quad \text{или} \quad F_{\Sigma} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}. \quad (1.16)$$

Направление равнодействующей, т. е. углы $\varphi_x = (\hat{F}_x, x)$ и $\varphi_y = (\hat{F}_y, y)$, образуемые вектором F_{Σ} с

осями, находим из формул

$$\cos \varphi_x = F_{\Sigma x} / F_{\Sigma} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_y = F_{\Sigma y} / F_{\Sigma}. \quad (1.17)$$

Таким образом, проекция равнодействующей системы сходящихся сил на каждую из осей координат равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось — уравнение (1.15); модуль равнодействующей системы сходящихся сил равен корню квадратному из суммы квадратов ее проекций на две взаимно перпендикулярные оси — формула (1.16); направление равнодействующей определяется с помощью так называемых направляющих косинусов — уравнения (1.17); причем косинус угла, образуемого вектором равнодействующей с положительным направлением оси, равен отношению проекции равнодействующей на эту ось к модулю самой равнодействующей.

Из выражений (1.15) и (1.16) непосредственно вытекает условие равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме.

Из § 1.6 известно, что равнодействующая равно-

вешенной системы сходящихся сил $F_{\Sigma}=0$. Если $F_{\Sigma}=0$, то ее проекции на оси $F_{\Sigma x}=0$ и $F_{\Sigma y}=0$; следовательно, равенства (1.15) в этом случае примут вид

$$\sum F_{kx}=0 \text{ и } \sum F_{ky}=0. \quad (1.18)$$

К этому же выводу придем и исходя из формулы (1.16): при $F_{\Sigma}=0$ $\sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}=0$ только в том случае, если каждое слагаемое под знаком корня порознь равно нулю (поскольку каждое из этих слагаемых — число положительное), т. е.

$$(\sum F_{kx})^2=0 \text{ и } (\sum F_{ky})^2=0,$$

а отсюда и получаем уравнения (1.18), выражающие в аналитической форме условие равновесия плоской системы сходящихся сил: *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на каждую из двух осей координат были равны нулю.*

Любое из двух уравнений, взятое отдельно от другого, является лишь необходимым условием равновесия, но не достаточным (представьте себе, что равнодействующая оказалась направленной перпендикулярно одной из осей), а оба уравнения вместе — уже достаточное условие того, что $F_{\Sigma}=0$ и система уравновешена.

Обычно заранее известно, что заданная система сходящихся сил уравновешена, так как тело под действием этой системы сохраняет состояние покоя. Но среди сил имеются неизвестные, которые необходимо определить. Чаще всего этими неизвестными силами является реакция связей. Заметим, что для того чтобы задачу с помощью уравнений равновесия (1.18) возможно было решить, число неизвестных не должно превышать двух, т. е. числа уравнений равновесия.

В § 1.6 рассмотрен пример с шаром на наклонной плоскости (см. рис. 1.22). На шар действуют три силы: заданная сила тяжести и численно неизвестные реакции связей R_K (направленная перпендикулярно наклонной плоскости) и R_A (направленная вдоль нити AB). Линии действия этих трех сил пересекаются в центре C шара; следовательно, три силы, приложенные к различным точкам шара, можно заменить

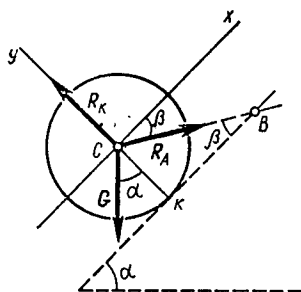


Рис. 1.26

эквивалентной системой сил, приложенных к одной точке C (рис. 1.26).

За начало координат примем точку C (центр шара), ось x — проведем параллельно наклонной плоскости, а ось y к ней — перпендикулярно, определим проекции сил на оси и составим уравнения (1.18).

Уравнение $\sum F_{kx} = 0$ примет в данном случае вид

$$R_A \cos \beta - G \cos (90^\circ - \alpha) = 0,$$

а уравнение $\sum F_{ky} = 0$ — вид

$$R_K - R_A \cos (90^\circ - \beta) - G \cos \alpha = 0.$$

Благодаря рациональному выбору положения осей первое уравнение содержит только одно неизвестное R_A , так как проекция силы R_K на ось x получилась равной нулю. Решив уравнения, легко найти значения R_A и R_K .

Пример 1.3. Как известно (см. пример 1.1), при $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ и $G = 60$ Н, $R_K = 66,9$ Н, а $R_A = 49$ Н. Подставьте заданные значения величин в уравнения, решите их и проверьте правильность ответов.

Вопросы для самопроверки

1. Сколько уравнений можно составить для уравновешенной системы сходящихся сил и какие?
2. Сформулируйте теорему о равновесии трех непараллельных сил, действующих на тело в одной плоскости.
3. Три действующие на тело силы лежат в одной плоскости и линии их действия пересекаются в одной точке. Образуют ли эти силы уравновешенную систему?
4. Как направлена сила F , если известны ее проекции на оси прямоугольной системы координат: а) $F_x = 0$; $F_y = F$; б) $F_x = -F$; $F_y = 0$; в) $F_x = F_y$; г) $F_x = -F_y$.

§ 1.7. Пара сил

Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны (рис. 1.27), называется парой сил (или просто парой).*

Известно, что две равные по модулю силы, приложенные к телу вдоль одной прямой и направленные в противоположные стороны, образуют уравновешенную систему (аксиома 2). Две приложенные к телу равные по модулю силы, направленные в любую сторону вдоль не параллельных, но лежащих в одной плоскости линий действия, можно сложить по правилу параллелограмма и тем самым заменить одной силой — равнодействующей (аксиома 4).

Пара сил — и не уравновешенная система и не имеет равнодействующей. Пара сил производит на тело вращательное действие.

Например, зажав карандаш между большим и указательным пальцами, мы можем его вращать, двигая пальцами в противоположные стороны, т. е. прикладывая к карандашу пару сил (рис. 1.28). При нарезании резьбы на болтах ручным способом (рис. 1.29) со стороны рук на клупп также действует пара сил.

Из § 1.13 мы узнаем, что любую плоскую систему сил можно заменить либо одной эквивалентной ей

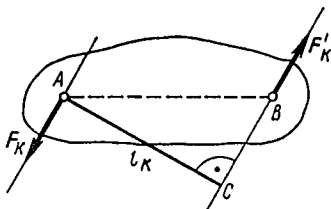


Рис. 1.27

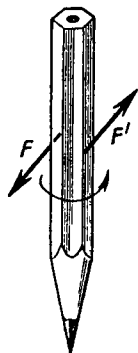


Рис. 1.28

* Понятие о паре сил ввел в механику французский ученый Луи Пуансо (1777—1859).

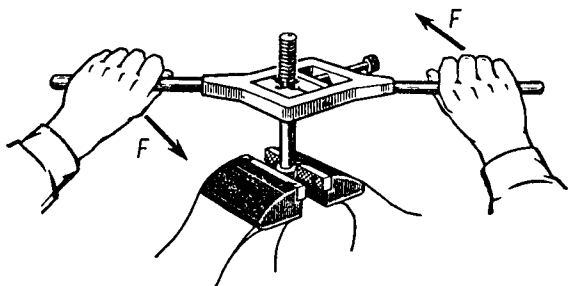


Рис. 1.29

силой (равнодействующей), либо одной эквивалентной ей парой сил. Таким образом, наравне с силой пара сил—*простейший элемент статики*.

Условимся обозначать пару сил символом (F_k, F_k) . Плоскость, в которой расположены силы, образующие пару сил, называется *плоскостью действия пары сил*.

Как отмечалось выше, пара сил производит на тело вращательное действие, причем если смотреть на плоскость действия пары с какой-либо одной стороны, то пара может поворачивать тело либо против хода часовой стрелки (см. рис. 1.27 и 1.28), либо по ходу часовой стрелки. Количественная мера воздействия пары сил на тело зависит от модуля F_k сил пары и кратчайшего расстояния (см. рис. 1.27) между линиями их действия, называемого плечом пары. Чем больше модули F_k сил пары и чем больше длина плеча l_k , тем больший вращательный эффект производит пара на тело.

Вращательный эффект пары измеряется взятым со знаком плюс или минус произведением модуля одной из сил пары на ее плечо. Эта алгебраическая величина называется моментом пары и обозначается M , т. е.

$$M = \pm Fl. \quad (1.19)$$

Знак плюс ставится перед числовым значением момента в том случае, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и знак минус, если пара стремится повернуть тело по ходу часовой стрелки. Например, на рис. 1.30, а на тело действует пара (F_1, F_1) с моментом $M_1 = F_1 l_1$, а на рис. 1.30, б — пара (F_2, F_2') с моментом $M_2 = -F_2 l_2$.

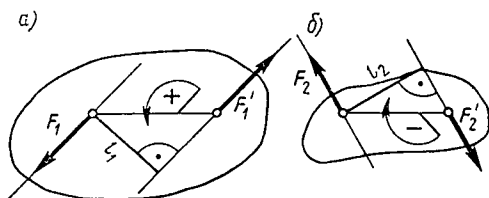


Рис. 1.30

В Международной системе единиц (СИ) моменты пар выражаются в Н·м или кН·м.

Итак, мы установили, что вращательное действие пары сил на тело зависит от числового значения ее момента, но оно зависит еще и от положения плоскости действия пары. Поэтому момент пары можно рассматривать как векторную величину. Вектор момента пары перпендикулярен плоскости пары, причем если пара стремится повернуть плоскость против хода часовой стрелки, то вектор момента направлен к нам (рис. 1.31, а), если же пара поворачивает плоскость по часовой стрелке (рис. 1.31, б), то вектор момента пары направлен от нас. Если же на плоскость действия пары смотрят два человека с разных сторон, то оба они построят один и тот же вектор момента. Расположим плоскость Π действия пары вертикально и допустим, что один из нас смотрит на эту плоскость справа (рис. 1.32, а), а второй — слева (рис. 1.32, б). Легко убедиться, что мы оба видим один и тот же вектор момента.

Короче говоря, вектор момента следует восстановить с той стороны плоскости, с которой пара представляется поворачивающей эту плоскость против хода часовой стрелки.

Правило определения направления вектора момента называется еще и правилом винта (шурупа) с

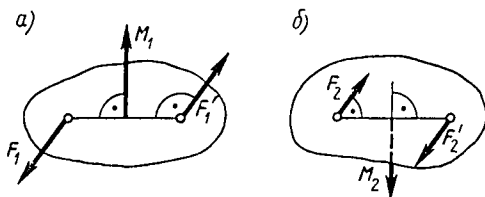


Рис. 1.31

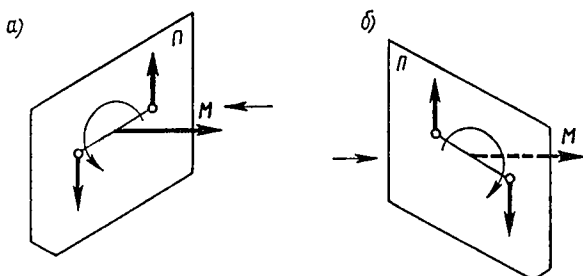


Рис. 1.32

правой нарезкой. Действительно, если ввертывать такой шуруп в доску (т. е. от нас), мы должны поворачивать отверткой головку шурупа по ходу часовой стрелки; если же хотим вывернуть шуруп из доски (т. е. к нам), то должны поворачивать головку шурупа против хода часовой стрелки.

§ 1.8. Эквивалентность пар сил

Рассмотрим две теоремы, характеризующие важные свойства пар сил.

Теорема 1. *Пару сил в плоскости ее действия можно переносить в любое новое положение, действие пары на тело при этом не изменится.*

Пусть дана пара (F_1, F'_1) с плечом AB и требуется перенести ее так, чтобы плечо AB заняло произвольно выбранное положение A_1B_1 (рис. 1.33, а).

Через точки A и B , а также A_1 и B_1 проведем прямые, перпендикулярные соответственно AB и A_1B_1 (рис. 1.33, б). Две первые параллельные линии пересекаются с двумя вторыми параллельными и образуют ромб $CDEK$ (так как дано $AB = A_1B_1 = l_1$, а параллелограмм, у которого две высоты, проведенные из одной вершины, равны, — ромб). Силу F_1 из точки A перенесем вдоль линии действия в точку C , а силу F'_1 — из точки B в точку E . В точке C вдоль прямой CA_1 приложим уравновешенную систему сил F_2 и F_3 , равных по модулю F_1 ; в точке E вдоль прямой DB_1 также приложим уравновешенную систему сил F'_2 и F'_3 , равных по модулю F'_1 ; таким образом, $F_1 = F_2 = F_3 = F'_1 = F'_2 = F'_3$.

Определим равнодействующую $F_{\Sigma C}$ сил F_1 и F_3 , приложенных к точке C , и равнодействующую $F_{\Sigma E}$ сил F'_3 , F'_1 , приложенных к точке E . Легко видеть, что

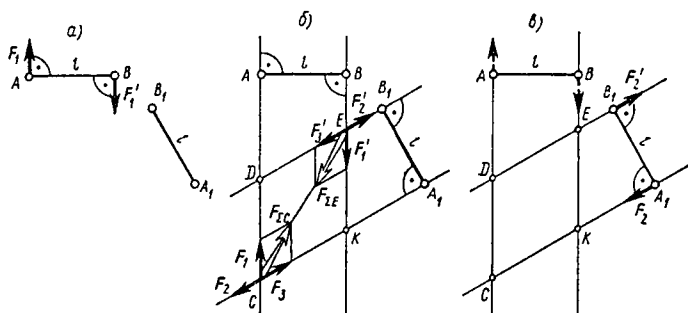


Рис. 1.33

силы $F_{\Sigma C}$ и $F_{\Sigma E}$ уравнивают друг друга, так как они равны между собой по модулю и действуют по диагонали CE ромба $CDEK$ в противоположные стороны. Следовательно, силы F_1 , F_3 , F'_3 и F'_1 , образовавшие уравновешенную систему, можно исключить из рассмотрения. Остаются две силы — сила F_2 , которую из точки C вдоль линии действия перенесем в точку A_1 (рис. 1.33, в), и сила F'_2 , которую из точки E перенесем в точку B_1 . Так как модули F_1 , F'_1 , F_2 , F'_2 и плечи AB и A_1B_1 равны, то получаем пару F_2 , F'_2 в положении A_1B_1 , эквивалентную пару F_1 , F'_1 в положении AB . Теорема доказана.

Переноса пару сил в любое положение в плоскости ее действия, мы тем самым переносим и точку приложения вектора момента пары, не меняя его ориентации в пространстве. Значит, **вектор момента пары — свободный вектор**.

Теорема 2. *Две пары, расположенные в одной плоскости, производят на тело одинаковое вращательное действие в том случае, если их моменты равны.*

Предположим, что задана пара (F_1, F'_1) с плечом $AB = l_1$. Следовательно, момент пары $M_1 = F_1 l_1$ (рис. 1.34, а). Присоединим к паре уравновешенную систему сил F и F' , действующих вдоль плеча AB (рис. 1.34, б), и сложим попарно силы F_1 и F , а также F'_1 и F' . Их равнодействующие F_2 и F'_2 образуют новую пару сил с плечом l_2 (рис. 1.34, в). Все произведенные выше преобразования сделаны на основе аксиом статики и не нарушают состояния, в

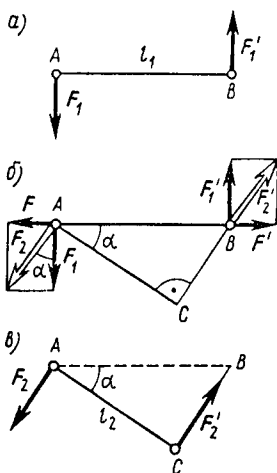


Рис. 1.34

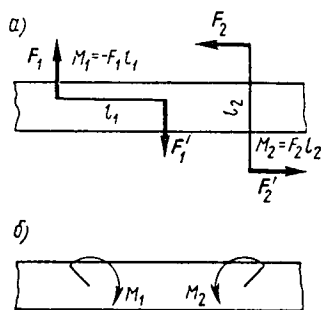


Рис. 1.35

котором находилось тело, т. е. пара (F_2, F_2') производит на тело такое же действие, как и пара (F_1, F_1') . Остается доказать равенство моментов этих пар сил:

$$\begin{array}{ll} \text{момент пары } (F_1, F_1') & M_1 = F_1 l_1, \\ \text{момент пары } (F_2, F_2') & M_2 = F_2 l_2. \end{array}$$

Из построений на рис. 1.34, б видно, что $l_2 = l_1 \cos \alpha$, $F_2 = F_1 / \cos \alpha$; следовательно, $M_2 = F_2 l_2 = (F_1 / \cos \alpha) l_1 \cos \alpha = F_1 l_1$, т. е. $M_2 = M_1$.

Теорема доказана.

Действующие в одной плоскости пары сил, моменты которых равны друг другу, называются *статически эквивалентными*.

Из доказанных теорем следует, что вращательное действие расположенной в данной плоскости пары сил зависит только от ее момента, поэтому для задания пары сил достаточно указать числовое значение ее момента, а затем по данному или выбранному плечу можно определить силы пары или по силам подобрать необходимое плечо. Исходя из этого, на рисунках и схемах пары сил изображают иногда просто круговой стрелкой, характеризующей лишь направление вращающего действия. Например, пары (F_1, F_1') и (F_2, F_2') , приложенные к брусу (рис. 1.35, а), можно условно изобразить круговыми стрелками, обозначив их M_1 и M_2 (рис. 1.35, б).

§ 1.9. Сложение пар сил. Условие равновесия пар

Теорема. Система пар, действующих на тело в одной плоскости, эквивалентна паре сил с моментом, равным алгебраической сумме моментов пар системы. Допустим, на тело действуют три пары (рис. 1.36, а), моменты которых M_1 , M_2 и M_3 известны. Каждую из заданных пар заменим эквивалентной парой соответственно (F_1, F'_1) , (F_2, F'_2) , (F_3, F'_3) , но с одинаковыми плечами $A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=l$, т. е. $M_1=F_1l$, $M_2=-F_2l$, $M_3=F_3l$, и расположим эти пары так, чтобы их силы действовали вдоль двух параллельных прямых (рис. 1.36, б).

Как известно (см. § 1.4), равнодействующая сил, действующих вдоль одной прямой, направлена по той же прямой и модуль ее равен алгебраической сумме составляющих сил. Поэтому, сложив силы, приложенные к точкам A_1, A_2, A_3 и к точкам B_1, B_2, B_3 , получим равнодействующую пару (F_Σ, F'_Σ) , эквивалентную трем заданным парам (рис. 1.36, в). При этом $F_\Sigma = F_1 - F_2 + F_3$.

Момент равнодействующей пары (F_Σ, F'_Σ)

$$M_\Sigma = F_\Sigma l,$$

а так как $F_\Sigma = F_1 - F_2 + F_3$, то

$$\begin{aligned} M_\Sigma &= (F_1 - F_2 + F_3)l = \\ &= F_1l - F_2l + F_3l \end{aligned}$$

или

$$M_\Sigma = M_1 + M_2 + M_3 \quad (1.20)$$

Теорема доказана.

Распространяя равенство (1.20) на любое число пар, действующих на тело, можем записать

$$M_\Sigma = \sum M_k. \quad (1.21)$$

Следовательно, для того чтобы сложить любое число пар, действующих на тело в одной плоскости, достаточно алгебраически сложить

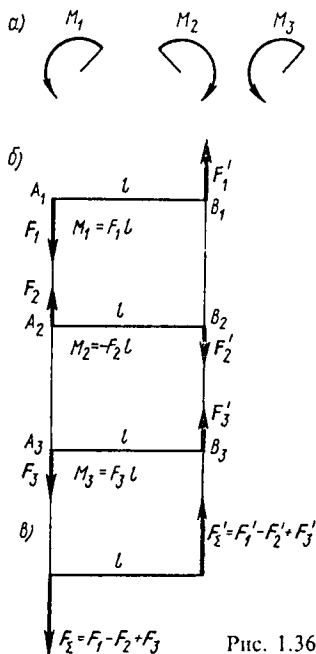


Рис. 1.36

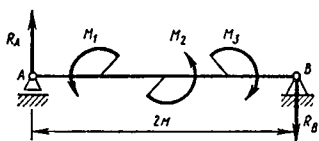


Рис. 1.37

моменты этих пар. Полученный в результате сложения момент и определяет равнодействующую пару сил.

Если в результате сложения пар $M_{\Sigma} = 0$, то действующие на тело пары сил образуют уравновешенную систему. Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия системы пар выражается одним уравнением

$$\sum M_k = 0, \quad (1.22)$$

т. е. для равновесия системы пар сил, действующих на тело в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма их моментов была равна нулю.

Значит, систему пар или одну пару можно уравновесить только парой.

Пример 1.4. Брус AB с левой шарнирно-подвижной опорой и правой шарнирно-неподвижной нагружен тремя парами (рис. 1.37), моменты которых $M_1 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = 36 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_3 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Определить реакции опор.

Решение. 1. На брус действуют пары сил; следовательно, и уравновесить их можно только парой, т. е. в точках A и B со стороны опор на брус должны действовать реакции опор, образующие пару сил. В точке A у бруса шарнирно-подвижная опора, значит ее реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности, т. е. в данном случае перпендикулярно брусу. Обозначим эту реакцию R_A и направим ее вверх. Тогда в точке B со стороны шарнирно-неподвижной опоры действует также вертикальная сила R_B , но вниз.

2. Исходя из выбранного направления сил пары (R_A , R_B) ее момент $M_0 = -R_A \cdot AB$ (или $M_0 = -R_B \cdot BA$).

3. Составим уравнение равновесия пар сил:

$$\sum M_k = M_1 + M_2 + M_3 + M_0 = 0.$$

Подставив в это уравнение значения моментов, получим

$$24 + 36 - 50 - R_A \cdot 2 = 0.$$

Отсюда $R_A = 5 \text{ кН}$. Так как силы R_A и R_B образуют пару, то $R_B = R_A = 5 \text{ кН}$.

§ 1.10. Момент силы относительно точки

Задолго до появления понятия о паре сил и ее моменте в механике возникло понятие о моменте силы относительно точки*.

Моментом силы относительно точки называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы (рис. 1.38), т. к.

$$M_O(\mathbf{F}) = \pm Fl. \quad (1.23)$$

Точка O , относительно которой берется момент силы, называется *центром* момента; $OB=l$ — кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы — называется *плечом* силы относительно данной точки; знак плюс ставится в случае, если сила \mathbf{F} стремится повернуть плечо l против хода часовой стрелки, а знак минус — в противоположном случае (правило знаков то же, что и у моментов пар сил). Момент силы \mathbf{F} относительно точки O на рис. 1.38 положительный.

Из равенства (1.23) следует, что при $l=0$, т. е. когда центр моментов O расположен на линии действия силы \mathbf{F} , $M_O(\mathbf{F})=0$.

Как известно, сила — скользящий вектор, поэтому при переносе силы \mathbf{F} по линиям действия из точки A в любую другую точку A_1 , A_2 и т. д. (рис. 1.38) длина плеча не изменится, а значит не изменится и значение момента силы относительно точки.

Между моментом пары и моментами сил пары относительно любой точки существует такая важная зависимость: *алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любой точки — величина постоянная для данной пары и равна ее моменту.*

Возьмем любую пару сил $(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ с плечом l (рис. 1.39), момент этой пары $M=Fl$. Выберем в плоскости пары произвольную точку O и восставим из нее перпендикуляры OB и OA к линиям действия сил \mathbf{F} и \mathbf{F}' пары. Определим моменты сил пары относительно точки O :

* Первый, кто обратил внимание на важную роль в механике момента силы относительно точки, был Леонардо да Винчи (1452—1519). Современную трактовку понятия момента силы относительно точки дал П. Вариньон (1654—1722).

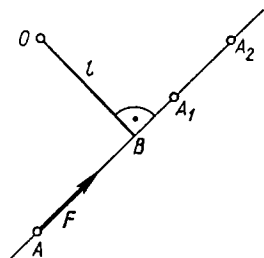


Рис. 1.38

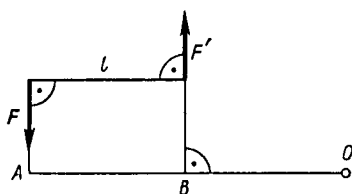


Рис. 1.39

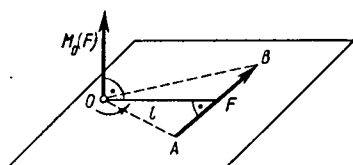


Рис. 1.40

$$M_O(\mathbf{F}) = F \cdot OA \text{ и}$$

$$M_O(\mathbf{F}') = -F' \cdot OB.$$

Сложим эти моменты сил:

$$M_O(\mathbf{F}) + M_O(\mathbf{F}') = F \cdot OA - F' \cdot OB = F(OA - OB) = Fl,$$

так как $F = F'$ и $OA - OB = l$ (где l — плечо пары).
Таким образом,

$$M_O(\mathbf{F}) + M_O(\mathbf{F}') = M. \quad (1.24)$$

Так же как и момент пары сил, момент силы относительно точки можно рассматривать как величину векторную.

Вектор момента силы \mathbf{F} относительно точки O приложен в той же точке O (рис. 1.40), направлен перпендикулярно плоскости действия момента в ту сторону, откуда сила представляется поворачивающей плечо l против хода часовой стрелки, и равен произведению модуля этой силы на плечо.

Вопросы для самопроверки

1. Можно ли заменить действие пары сил на тело действием одной силы?

2. К концам отрезка длиной 1 м приложены две параллельные силы по 100 Н, направленные в противоположные стороны. Как изменится момент этой пары, если каждую силу повернуть по ходу часовой стрелки на 60° ?

3. Две силы по 100 Н образуют пару с плечом 0,5 м, а силы по 400 Н — пару с плечом 12,5 см. Могут ли эти пары уравновесить друг друга и в каком случае?

ГЛАВА 4. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

§ 1.11. Приведение силы к точке

В начале прошлого века Л. Пуансо доказал теорему о параллельном переносе силы в любую заданную или выбранную точку.

Пусть дана сила F , приложенная к точке A твердого тела, и ее требуется перенести в точку O (рис. 1.41, а). Приложим к телу в точке O (рис. 1.41, б) уравновешенную систему сил F' F'' , параллельных F и равных ей по модулю (т. е. $F' = F'' = F$). Теперь кроме силы F'' , приложенной к точке O , образовалась пара сил (F, F') с моментом $M = Fl$, но и момент данной силы F относительно точки O $M_O(F) = Fl$, т. е. $M = M_O(F)$.

Таким образом, *всякую силу F , приложенную к телу в точке A , можно переносить параллельно линии действия в любую точку O , присоединив пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки ее приложения.*

Операция такого переноса силы называется *приведением силы к точке*, а появляющаяся при этом пара (F, F') с моментом $M = M_O(F)$ называется *присоединенной парой* (рис. 1.41, в). Операция приведения силы к точке имеет глубокий физический смысл.

Представим себе заделанный в стену прямой брус (рис. 1.42). Если к концу бруса приложить силу F так, чтобы линия ее действия пересекала ось бруса (рис. 1.42, а), то, как показывает опыт, брус можно только изогнуть. Если же к брусу приложить силу F , как на рис. 1.42, б, то брус можно не только изогнуть, но и скрутить, так как в последнем случае сила F

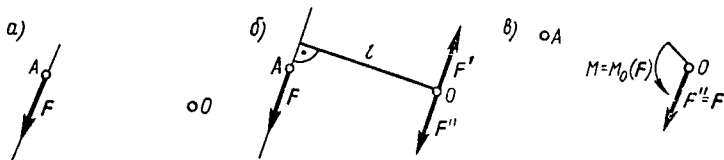


Рис. 1.41

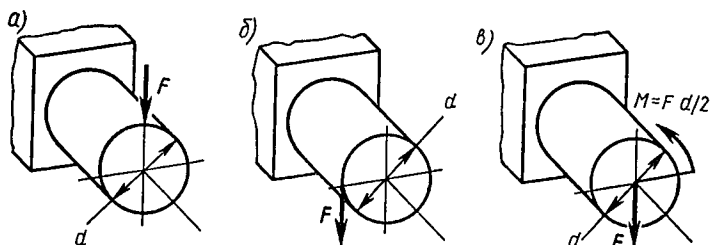


Рис. 1.42



Рис. 1.43

эквивалентна силе F и паре сил с моментом $M = F(d/2)$ (рис. 1.42, в) *.

Известно, что колесо невозможно повернуть вокруг оси, если линия действия приложенной силы пересекает ось колеса (рис. 1.43, а), так как в этом случае колесо только давит на ось и действующая на колесо сила F уравнивается реакцией оси R . Если же к колесу приложить силу F , как показано на рис. 1.43, б, то колесо повернется, так как теперь кроме силы давления на ось F' возникает пара сил (F , R) с вращающим моментом $M = F(d/2)$.

Таким образом, момент силы F , приложенной к точке A , относительно точки O (рис. 1.43, б) есть не что иное, как скрытый или замаскированный момент присоединенной пары.

§ 1.12. Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил

Пусть задана система четырех сил F_1 , F_2 , F_3 и F_4 (рис. 1.44, а), расположенных в плоскости как угодно, т. е. они не параллельны друг другу и линии их действия не пересекаются в одной точке.

* Подробно об этом сказано в разделе II «Сопротивление материалов».

Выберем произвольную точку O — центр приведения — и приведем к нему силу F_1 , т. е. перенесем силу F_1 в точку O (рис. 1.44, б), присоединим пару сил с моментом $M_1 = M_O(F_1)$ *. Затем приведем к точке O силу F_2 : перенесем ее в эту точку и присоединим пару с моментом $M_2 = M_O(F_2)$. Так же поступим и с остальными силами F_3 и F_4 , присоединив пары с моментами $M_3 = M_O(F_3)$ и $M_4 = M_O(F_4)$. Как видно из рис. 1.44, б, в результате последовательного приведения заданных сил к точке образовались система сходящихся сил и система присоединенных пар с моментами, равными моментам заданных сил относительно точки (центра) приведения.

С помощью силового многоугольника (см. § 1.5) находим силу $F_{г\text{л}}$, эквивалентную системе приведенных сил (рис. 1.44, б). Сложив алгебраические моменты присоединенных пар, найдем момент одной эквивалентной им пары:

$$M_{г\text{л}} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4,$$

или, так как моменты присоединенных пар равны моментам данных сил относительно центра приведения,

$$M_{г\text{л}} = M_O(F_1) + M_O(F_2) + M_O(F_3) + M_O(F_4).$$

Сила $F_{г\text{л}}$, равная геометрической сумме заданных сил, называется *главным вектором* системы, а момент $M_{г\text{л}}$, равный алгебраической сумме моментов присоединенных пар, или алгебраической сумме моментов заданных сил относительно данного центра, называется *главным моментом* системы.

Очевидно, в заданную систему сил может входить не четыре, а любое число сил. Значит, в общем виде можно записать:

$$F_{г\text{л}} = \sum F_k \quad (1.25)$$

и

$$M_{г\text{л}} = \sum M_O(F_k). \quad (1.26)$$

Таким образом, *произвольная плоская система сил эквивалентна одной силе — главному вектору и одной паре, момент которой равен главному моменту.*

* На рис. 1.44, б присоединенные пары изображены круговыми стрелками, направленным в сторону поворота силами F_1 , F_2 , F_3 и F_4 соответствующих плеч l_1 , l_2 , l_3 и l_4 (см. рис. 1.44, а).

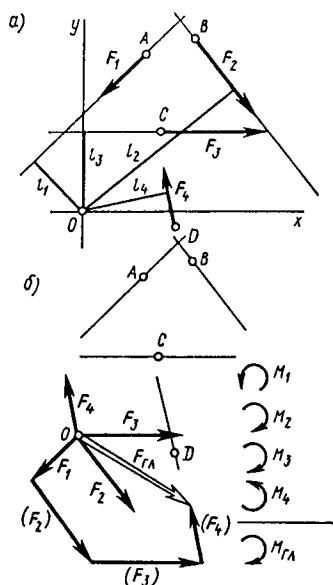


Рис. 1.44

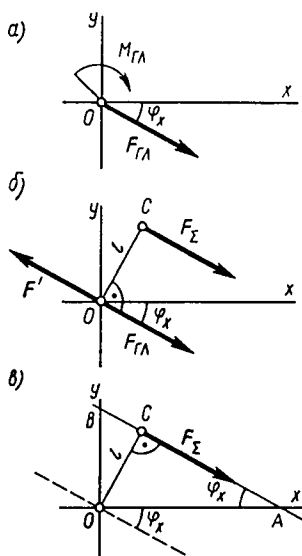


Рис. 1.45

Ввиду того что модуль и направление главного вектора $F_{гл}$ соответствуют замыкающей стороне силового многоугольника со сторонами, равными векторам заданных сил, для его определения используют метод проекций, изложенный в § 1.6. Начало осей координат в этом случае целесообразно поместить в центре приведения, как, например, показано на рис. 1.44, а. Тогда модуль главного вектора определяют по формуле (1.16):

$$F_{гл} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}, \quad (1.27)$$

где F_{kx} и F_{ky} — проекции заданных сил соответственно на оси x и y ; направление главного вектора, т. е. углы φ_x и φ_y , образуемые линией действия главного вектора с осями координат, определяются по формулам (1.17):

$$\cos \varphi_x = F_{глx} / F_{гл} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_y = F_{глы} / F_{гл}, \quad (1.28)$$

где $F_{глx} = \sum F_{kx}$ — проекция главного вектора на ось x и $F_{глы} = \sum F_{ky}$ — проекция главного вектора на ось y .

Следует заметить, что модуль и направление главного вектора не зависит от выбора центра приведения (где бы ни была выбрана точка O и в каком бы порядке ни строили силовой многоуголь-

ник, его замыкающая сторона никак не изменится). Значение же главного момента $M_{г\lambda}$ зависит от выбора центра приведения (при изменении положения точки O изменяется длина плеч l_k , см. рис. 1.44, а).

Рассмотренное выше приведение плоской системы сил к силе и паре — необходимый этап задачи определения равнодействующей этой системы. Действительно, в общем случае*, когда $F_{г\lambda} \neq 0$ и $M_{г\lambda} \neq 0$, главный вектор и определяемую главным моментом пару сил можно заменить одной эквивалентной им силой, т. е. определить равнодействующую произвольной плоской системы сил.

Допустим, что, приведя плоскую систему сил к точке, мы получили главный вектор $F_{г\lambda}$ и пару сил с моментом $M_{г\lambda}$ (рис. 1.45, а). Представим главный момент в виде пары сил (F' , F_{Σ}), численно равных главному вектору ($F_{\Sigma} = F' = F_{г\lambda}$), и с плечом $l = M_{г\lambda}/F_{г\lambda}$. Расположим эту пару таким образом, чтобы одна из сил оказалась направленной вдоль линии действия главного вектора, но в противоположную сторону (рис. 1.45, б). Тогда силы F' и $F_{г\lambda}$ можно исключить как взаимно уравновешенные, а оставшаяся сила F_{Σ} и есть искомая равнодействующая рассматриваемой системы сил (рис. 1.45, в). Расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей

$$OC = l = M_{г\lambda}/F_{\Sigma}. \quad (1.29)$$

Следовательно, *равнодействующая произвольной плоской системы сил равна главному вектору и расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей равно частному от деления главного момента на модуль главного вектора или равнодействующей.*

Иногда важно знать, какой длины отрезки OA и OB отсекает линия действия равнодействующей от осей координат (рис. 1.45, в). Эти отрезки легко найти из прямоугольных треугольников OAC или OBC , в которых известны катет $OC = l$ и один из острых углов.

Пример 1.5. К двум точкам тела приложены четыре силы $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 5$ Н, как показано на рис. 1.46, а. Привести эти силы к точке A , а затем найти их равнодействующую.

* Частные случаи приведения системы сил к силе и паре рассмотрены в § 1.14.

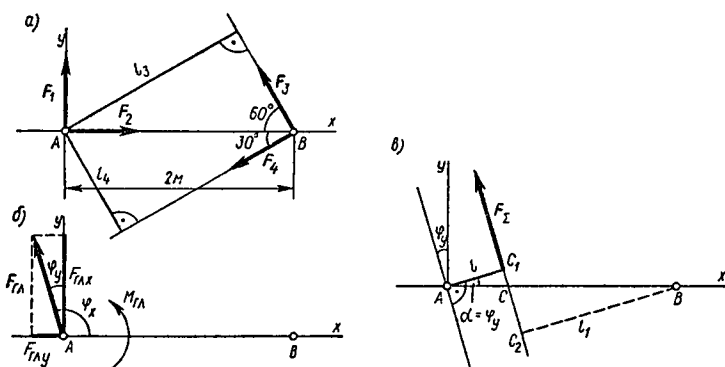


Рис. 1.46

Решение. 1. Центр приведения точка A задан. Поэтому примем точку A за начало координат и проведем ось x вдоль отрезка AB , а ось y — по линии действия силы F_1 (рис. 1.46, а).

2. Определим проекции сил на ось x : $F_{1x}=0$; $F_{2x}=F_2=5$ Н; $F_{3x}=-F_3 \sin 30^\circ=5 \sin 30^\circ=-2,5$ Н; $F_{4x}=-F_4 \sin 60^\circ=-4,33$ Н.

Отсюда проекция на ось x главного вектора

$$F_{rx} = \sum F_{ix} = 5 - 2,50 - 4,33 \text{ Н} = -1,83 \text{ Н}.$$

3. Определим проекции сил на ось y : $F_{1y}=F_1=5$ Н; $F_{2y}=0$; $F_{3y}=F_3 \sin 60^\circ=5 \sin 60^\circ=4,33$ Н; $F_{4y}=-F_4 \sin 30^\circ=-5 \sin 30^\circ=-2,50$ Н.

Отсюда проекция на ось y главного вектора

$$F_{ry} = \sum F_{iy} = 5 + 4,33 - 2,50 = 6,83 \text{ Н}.$$

Для большей наглядности и облегчения дальнейшего решения задачи целесообразно найденные проекции F_{rx} и F_{ry} главного вектора отложить вдоль осей координат (рис. 1.46, б).

4. Из формулы (1.27) определим модуль главного вектора:

$$F_{rl} = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = \sqrt{1,83^2 + 6,83^2} = 7,07 \text{ Н}.$$

5. Находим угол $\varphi_y = (\hat{F}_{rl}, y)$:

$$\cos \varphi_y = \frac{F_{ry}}{F_{rl}} = \frac{6,83}{7,07} = 0,966.$$

По таблицам или с помощью логарифмической линейки определяем

$$\varphi_y = 14^\circ.$$

Из рис. 1.46, б следует, что $\varphi_x = 90^\circ + 14^\circ = 104^\circ$.

6. Определяем главный момент, как алгебраическую сумму моментов данных сил относительно точки A [см. формулу (1.26)] $M_A(F_1)=0$ и $M_A(F_2)=0$, так как линии действия сил F_1 и F_2 проходят через центр приведения A ; $M_A(F_3)=F_3 l_3=5 \cdot 2 \sin 60^\circ=8,66$ Н·м; $M_A(F_4)=-F_4 l_4=-5 \cdot 2 \sin 30^\circ=5$ Н·м (из рис. 1.46, а видно, что $l_3=AB \sin 60^\circ$ и $l_4=AB \sin 30^\circ$).

$$M_{\text{гл}} = \sum M_A(F_k) = 8,66 - 5 \text{ Н} \cdot \text{м} = 3,66 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Главный момент $M_{\text{гл}} > 0$, значит он действует против хода часовой стрелки (рис. 1.46, б).

7. Равнодействующая $F_{\Sigma} = F_{\text{гл}}$ и линия ее действия, параллельная главному вектору, проходит от центра приведения A на расстоянии

$$AC_1 = l = \frac{M_{\text{гл}}}{F_{\Sigma}} = \frac{3,66}{7,07} = 0,518 \text{ м} \approx 52 \text{ см}$$

(рис. 1.46, в).

Линия действия равнодействующей пересекает ось x в точке C и отсекает от AB отрезок

$$AC = \frac{l}{\cos \varphi} = \frac{0,518}{\cos 14^\circ} = 0,536 \text{ м} \approx 54 \text{ см}.$$

Таким образом, равнодействующая заданной системы сил $F_{\Sigma} = 7,07 \text{ Н}$, линия ее действия образует с выбранными осями координат углы $\varphi_x = 104^\circ$, $\varphi_y = 14^\circ$ и пересекает отрезок AB в точке C на расстоянии $AC \approx 54 \text{ см}$. Тот же результат получили бы при центре приведения в точке B , но в этом случае получилось бы $BC_2 = l_1 = 1,42 \text{ м}$ и $BC \approx 146 \text{ см}$ (рис. 1.46, в). Проверьте, так ли это?

§ 1.13. Теорема Вариньона

Непосредственно из равенства (1.29) вытекает важная зависимость между моментом равнодействующей и моментами составляющих сил, известная в механике как теорема Вариньона.

Перепишем равенство (1.29) в таком виде:

$$F_{\Sigma} l = M_{\text{гл}}.$$

Из рис. 1.45, в следует что, $F_{\Sigma} l = M_O(F_{\Sigma})$ — момент равнодействующей относительно любой точки, а по формуле (1.26) $M_{\text{гл}} = \sum M_O(F_k)$. Поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$M_O(F_{\Sigma}) = \sum M_O(F_k), \quad (1.30)$$

т. е. момент равнодействующей произвольной плоской системы сил относительно любой точки равен алгебраической сумме моментов сил системы, взятых относительно той же точки.

С помощью теоремы Вариньона решаются многие задачи механики. В частности, легко определяется равнодействующая система параллельных сил. Как это делается, покажем на примере.

Пример 1.6. Определить равнодействующую пяти параллельных сил $F_1 = 6 \text{ Н}$, $F_2 = 8 \text{ Н}$, $F_3 = 10 \text{ Н}$, $F_4 = 15 \text{ Н}$ и $F_5 = 3 \text{ Н}$, приложенных к телу, как показано на рис. 1.47, а.

Решение. 1. Находим модуль равнодействующей. Как известно,

$$F_{\Sigma} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}.$$

Но если ось x расположить перпендикулярно силам, а ось y — параллельно (рис. 1.47, а), направив ее положительный отсчет вниз, то проекции каждой из сил на ось x равны нулю и, значит,

$$\sum F_{kx} = 0,$$

а проекции сил на ось y равны их модулям с соответствующими знаками: $F_{1y} = F_1 = 6$ Н, $F_{2y} = -F_2 = -8$ Н, $F_{3y} = F_3 = 10$ Н, $F_{4y} = F_4 = 15$ Н, $F_{5y} = -F_5 = -3$ Н.

Таким образом, модуль равнодействующей системы параллельных сил

$$F_{\Sigma} = \sum F_{ky} = \sum F_k.$$

Вектор равнодействующей F_{Σ} направлен параллельно составляющим силам в сторону положительного отсчета оси y , если $\sum F_{ky} > 0$, и в сторону отрицательного отсчета, если $\sum F_{ky} < 0$. В данном случае $F_{\Sigma} = \sum F_k = 6 - 8 + 10 + 15 - 3 = 20$ Н, т. е. равнодействующая равна 20 Н и направлена вниз.

2. Изобразим эту равнодействующую условно штриховой линией на некотором расстоянии x от начала координат (рис. 1.47, а) и запишем моменты всех сил относительно точки A :

$$M_{A1}(F_{\Sigma}) = -F_{\Sigma}x;$$

$$M_{A1}(F_1) = 0; \quad M_{A1}(F_2) = F_2 \cdot A_1 A_2; \quad M_{A1}(F_3) = -F_3 \cdot A_1 A_3;$$

$$M_{A1}(F_4) = -F_4 \cdot A_1 A_4; \quad M_{A1}(F_5) = F_5 \cdot A_1 A_5.$$

И согласно теореме Вариньона, т. е. по уравнению (1.30), получим

$$-F_{\Sigma}x = F_2 \cdot A_1 A_2 - F_3 \cdot A_1 A_3 - F_4 \cdot A_1 A_4 + F_5 \cdot A_1 A_5.$$

Отсюда после подстановки числовых значений сил и плеч

$$-20x = 8 \cdot 0,2 - 10 \cdot 0,4 - 15 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,8$$

получим

$$x = l = 0,45 \text{ м.}$$

Следовательно, $F_{\Sigma} = 20$ Н, а ее линия действия, параллельная составляющим силам, проходит от точки A на расстоянии $l = 0,45$ м (рис. 1.47, б).

Известные из физики зависимости, возникающие при сложении двух параллельных сил, можно получить из теоремы Вариньона.

Даны приложенные к телу параллельные силы F_1 и F_2 , направленные в одну сторону (рис. 1.48, а). Согласно равенству $F_{\Sigma} = \sum F_k$, полученному в примере 1.3, ясно, что в данном случае

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2,$$

а вектор равнодействующей F_{Σ} , приложенный в

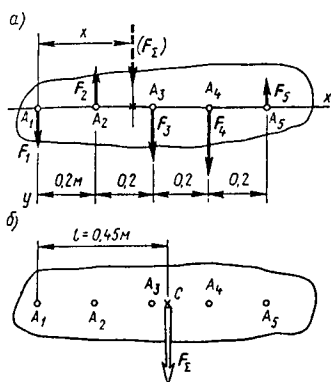


Рис. 1.47

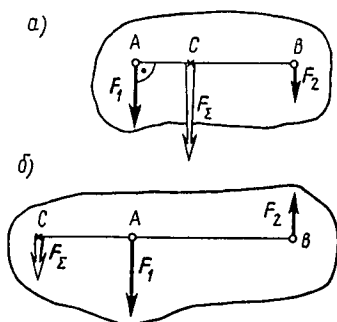


Рис. 1.48

некоторой точке C , направлен параллельно силам в ту же сторону.

Возьмем сумму моментов сил относительно точки C — точки, через которую проходит линия действия равнодействующей. Тогда $M_C(\mathbf{F}_\Sigma) = 0$ и, следовательно, $M_C(\mathbf{F}_1) + M_C(\mathbf{F}_2) = 0$, т. е. $F_1 AC - F_2 BC = 0$ или $F_1 AC = F_2 BC$.

Отсюда получаем известную из физики пропорциональную зависимость

$$F_1/BC = F_2/AC, \quad (1.31)$$

т. е. *расстояния от линий действия двух параллельных сил до линии действия равнодействующей обратно пропорциональны силам.*

Легко доказать (проделайте это самостоятельно), что такую же зависимость получим и при определении равнодействующей двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны, хотя в этом случае модуль равнодействующей $F_\Sigma = F_1 - F_2$. Направлена она в сторону большей по модулю силы, и линия ее действия расположена не между слагаемыми силами, а за большей из них (рис. 1.48, б).

Воспользовавшись известным из математики свойством пропорции (или свойством ряда равных отношений), выражение (1.31) можно записать так:

$$F_1/BC = F_2/AC = \frac{F_1 + F_2}{BC + AC},$$

но $F_1 + F_2 = F_\Sigma$ и $BC + AC = AC$, поэтому

$$F_1/BC = F_2/AC = F_3/AB. \quad (1.32)$$

С помощью равенства (1.32) обычно решают задачи сложения двух параллельных сил, а также задачи разложения силы на две параллельные составляющие.

§ 1.14. Частные случаи приведения плоской системы сил к точке. Условие равновесия

В § 1.12 доказано, что произвольную систему сил в общем случае можно привести к главному вектору $F_{гг}$ и к паре, определяемой главным моментом $M_{гг}$. Но возможны и частные случаи, если в результате приведения главный вектор или главный момент или оба они получатся равными нулю.

1-й случай. $F_{гг} \neq 0$, $M_{гг} = 0$, плоская система сил сразу привелась к равнодействующей.

Действительно, если $M_{гг} = 0$, то это означает, что система присоединенных пар уравнилась потому, что выбранный центр приведения лежит на линии действия равнодействующей $F_{гг} = F_{гг}$.

2-й случай. $F_{гг} = 0$, $M_{гг} \neq 0$, плоская система сил равнодействующей не имеет, она эквивалентна паре сил с моментом $M_{гг}$.

Действительно, если $F_{гг} = 0$, то это означает, что силовой многоугольник, построенный из заданных сил, получился замкнутым (или, что то же самое, алгебраические суммы проекций всех сил на оси x и y оказались равны нулю), а при сложении присоединенных пар образовалась одна эквивалентная им пара сил.

В качестве иллюстрации подобного случая можно привести плоскую систему параллельных сил, у которой алгебраическая сумма проекций сил на ось, параллельную силам, равна нулю. Такая система, как правило, приводится к паре сил.

Пример 1.7. На тело действует система пяти параллельных сил $F_1 = 12$ Н, $F_2 = 5$ Н, $F_3 = 4$ Н, $F_4 = 6$ Н, $F_5 = 9$ Н, как показано на рис. 1.49, а. Определить главный вектор и главный момент этой системы.

Решение. 1. За центр приведения примем точку A и проведем оси x и y , как показано на рис. 1.49, а.

2. Определим проекции главного вектора на оси:

$$F_{ггx} = \sum F_{kx} = 0$$

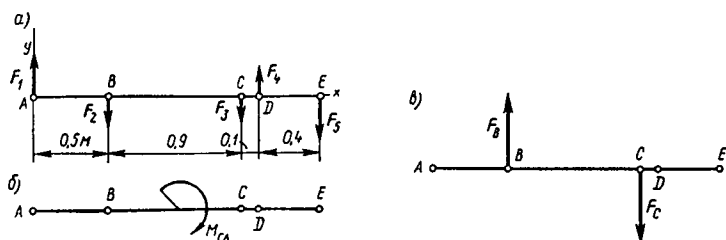


Рис. 1.49

и

$$F_{\text{гл}} = \sum F_{k_y} = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 - F_5 = 12 - 5 - 4 + 6 - 9 = 0.$$

Отсюда следует, что $F_{\text{гл}} = 0$.

Этот же результат можно получить, построив из пяти заданных сил силовой многоугольник.

3. Определим главный момент:

$$M_{\text{гл}} = \sum M_A(F_k) = M_A(F_1) + M_A(F_2) + M_A(F_3) + M_A(F_4) + M_A(F_5).$$

Отсюда $M_{\text{гл}} = 0 - F_2 \cdot AB - F_3 \cdot AC + F_4 \cdot AD - F_5 \cdot AE$. Подставив числовые значения, получим

$$M_{\text{гл}} = -16,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Следовательно, данная система сил эквивалентна паре с моментом $-16,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$, т. е. паре сил, действующей по ходу часовой стрелки (рис. 1.49, б).

4. Так как система сил эквивалентна паре, значение главного момента в этом случае не зависит от выбора центра приведения.

5. Пару, эквивалентную данной системе параллельных сил, можно получить, сложив сначала силы F_1 и F_4 , направленные вверх, а затем силы F_2 , F_3 и F_5 , направленные вниз. В первом случае получим силу $F_B = 18 \text{ Н}$, приложенную в точке B, а во втором — силу $F_C = 18 \text{ Н}$, приложенную в точке C (рис. 1.49, в). Проверьте, так ли это? Легко также проверить, что момент образовавшейся пары (F_B , F_C) равен найденному выше главному моменту.

3-й случай. $F_{\text{гл}} = 0$ и $M_{\text{гл}} = 0$, плоская система уравновешена. Действительно, если $F_{\text{гл}} = 0$, то силовой многоугольник из приведенных сил замкнут, т. е. приведенные в точку силы уравновешены, а если $M_{\text{гл}} = 0$, то система присоединенных пар уравновешена, значит и заданная система сил также уравновешена.

Следовательно, *необходимое и достаточное условие равновесия произвольной плоской системы сил состоит в том, чтобы главный вектор этой системы и ее главный момент были равны нулю:*

$$F_{\text{гл}} = 0, \quad M_{\text{гл}} = 0. \quad (1.33)$$

Каждое из двух этих равенств выражает необходимое условие равновесия, но одного из них недостаточно для равновесия системы (см. 1-й и 2-й частные случаи приведения).

§ 1.15. Уравнения равновесия и их различные формы

При решении задач статики обычно исходят из того, что рассматриваемое в задаче тело находится в покое и, значит, согласно первой аксиоме на него действует уравновешенная система внешних сил. Приступая к решению такой задачи, где на тело действует произвольная плоская система сил, мы заранее знаем, что условие равновесия, выраженное равенствами (1.33), выполняется, т. е. если произвольная плоская система сил уравновешена, то ее главный вектор равен нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки также равна нулю.

Как отмечалось выше (см. § 1.6), при решении задач статики задаются нагрузками, а по ним определяют реакции опор. Сами задачи решаются с применением алгебраических методов с помощью систем уравнений, которые получают из условий равновесия.

Рассмотрим три формы уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил.

Первая форма уравнений равновесия вытекает непосредственно из равенств (1.33), определяющих необходимое и достаточное условие равновесия плоской системы сил.

Главный вектор плоской системы сил может быть равным нулю лишь в том случае, если его проекции на две взаимно перпендикулярные оси равны нулю, т. е. из равенства $\mathbf{F}_{гл} = 0$ следует

$$F_{глx} = \sum F_{kx} = 0 \text{ и } F_{глы} = \sum F_{ky} = 0^*.$$

Главный момент равен нулю только в том случае, если

$$M_{гл} = \sum M_O(\mathbf{F}_k) = 0.$$

* К этому же выводу можно прийти, приравняв нулю выражение (1.27) модуля главного вектора.

Таким образом, первая форма уравнений равновесия плоской системы сил имеет вид

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum M_o(F_k)=0. \quad (1.34)$$

Следовательно, если плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы проекций всех сил на оси x и y равны нулю, а также равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки.

Как видим, уравнений равновесия три, т. е. в произвольной плоской уравновешенной системе число неизвестных сил не должно превышать трех.

Вторая форма уравнений равновесия получается, если вместо одного уравнения моментов составить два, например

$$\sum M_A(F_k)=0 \quad \text{и} \quad \sum M_B(F_k)=0,$$

и к ним добавить одно уравнение проекций на любую ось, кроме той, которая перпендикулярна прямой, проходящей через центры моментов A и B в первых двух уравнениях. В противном случае система уравнений не соответствует условию равновесия. Представим, что система не уравновешена, точки A и B лежат на линии действия равнодействующей F_Σ (рис. 1.50). В этом случае равны нулю и суммы моментов сил относительно точек A и B , и алгебраическая сумма проекций сил на ось y , перпендикулярную AB .

Таким образом, если точки A и B для моментов сил взяты на оси x , то алгебраическую сумму проекций целесообразно брать на эту же ось и вторая форма уравнений равновесия примет вид

$$\sum M_A(F_k)=0, \quad \sum M_B(F_k)=0, \quad \sum F_{kx}=0. \quad (1.35)$$

Следовательно, если произвольная плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы моментов сил относительно двух любых точек, а также алгебраическая сумма проекций сил на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через эти точки, равны нулю.

Третью форму уравнений равновесия получим, если вместо уравнения проекций к двум уравнениям моментов относительно двух про-

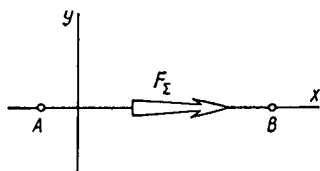


Рис. 1.50

извольно взятых точек A и B добавить третье уравнение моментов сил относительно какой-либо точки C , не лежащей на прямой AB :

$$\begin{aligned}\sum M_A(\mathbf{F}_k) &= 0, \quad \sum M_B(\mathbf{F}_k) = 0, \\ \sum M_C(\mathbf{F}_k) &= 0,\end{aligned}\tag{1.36}$$

т. е. если произвольная плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы моментов сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой, равны нулю.

В частном случае к телу может быть приложена уравновешенная система параллельных сил и тогда, рационально расположив оси координат (например, ось x — перпендикулярно силам, а ось y — параллельно им), из уравнений (1.34) и, учитывая, что $\sum F_{ky} = \sum F_k$, получим два уравнения*:

$$\sum F_k = 0, \quad \sum M_O(\mathbf{F}_k) = 0.\tag{1.37}$$

Если плоская система параллельных сил уравновешена, то алгебраическая сумма проекций сил на ось, параллельную силам, и алгебраическая сумма моментов сил относительно любой точки равны нулю.

Расположив центры моментов A и B на прямой, перпендикулярной направлениям сил, из уравнения (1.35) получим вторую форму уравнений равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\sum M_A(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum M_B(\mathbf{F}_k) = 0.\tag{1.38}$$

Этот же результат получим, если, исходя из уравнений (1.36), два центра моментов из трех, например точки B и C , выберем на прямой, параллельной силам, так как тогда уравнения моментов сил относительно этих точек получаются идентичными.

Таким образом, если плоская система параллельных сил уравновешена, то равны нулю алгебраические суммы моментов сил относительно двух любых точек, лежащих на прямой, не параллельной линиям действия сил.

Обратим внимание на то, что для плоской системы параллельных сил получаем два уравнения

* Уравнение $\sum F_{kx} = 0$ в этом случае обратится в тождество $0 = 0$.

равновесия, т. е. для того, чтобы задача могла быть решенной, число неизвестных сил должно быть не больше двух. Вообще говоря, все задачи на равновесие системы сил, в которых число неизвестных не превосходит числа уравнений статики для этой системы, называются *статически определенными*. Если же число неизвестных сил превышает число уравнений статики, которые возможно составить для данной системы, то задача называется *статически неопределимой*. Решение подобных задач рассмотрено во втором разделе учебника.

§ 1.16. Балочные системы. Разновидности опор и виды нагрузок

Объектом решения многих задач статики служат так называемые балки или балочные системы. *Балкой* называется конструктивная деталь какого-либо сооружения, выполняемая в большинстве случаев в виде прямого бруса с опорами в двух (или более) точках.

Из предыдущего параграфа известно, что условие равновесия произвольной плоской системы сил выражается тремя уравнениями, значит с их помощью можно определить реакции опор только в том случае, если число реакций связи не превышает трех. Таким образом, балка статически определима, если она, например, опирается на три непараллельных шарнирно-прикрепленных стержня (рис. 1.51, а); имеет две

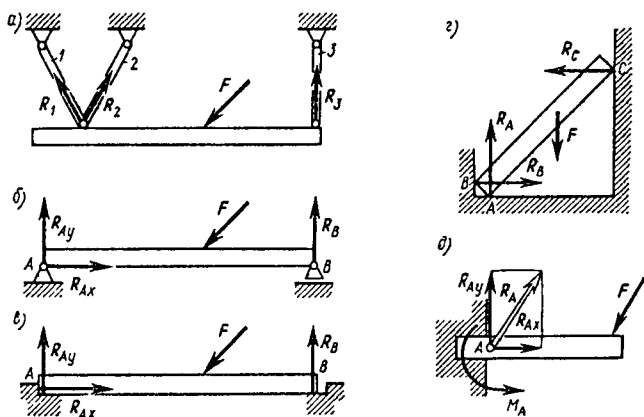


Рис. 1.51

опоры, из которых одна шарнирно-неподвижная, другая — шарнирно-подвижная (рис. 1.51, б); опирается на две гладкие поверхности, из которых одна с упором (рис. 1.51, в); опирается в трех точках на гладкие поверхности (рис. 1.51, г); жестко заделана в стену или защемлена специальным приспособлением (рис. 1.51, д). В первых четырех случаях действие сил на балку уравнивается тремя реакциями опор (рис. 1.51, а — г). Жесткая заделка (защемление) в отличие от неподвижного шарнира (см. § 1.3) препятствует не только поступательному перемещению балки, но и ее вращению в любом направлении. Поэтому кроме реакции (силы) R_A (рис. 1.51, д), которую, как и в случае шарнирно-неподвижной опоры, можно заменить двумя составляющими R_{Ax} и R_{Ay} , в заделке возникает реактивная пара с моментом M_A , препятствующая повороту балки.

По способу приложения силы условно делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*. До сих пор мы рассматривали сосредоточенные силы, предполагая, что нагрузка сосредоточена в точке. Однако, строго говоря, приложить силу в точке невозможно, но во многих случаях такая схематизация допустима. Например, если на балке лежит цилиндрическое тело 1 или на балку опирается стеновая панель 2 (рис. 1.52, а), то при определении опорных реакций целесообразно считать, что балка нагружена сосредоточенными силами F_1 и F_2 , равными силам тяжести тел 1 и 2 (рис. 1.52, б).

Часто невозможно пренебречь тем, что к рассматриваемому телу приложена сплошная нагрузка. При этом различают нагрузку, распределенную по линии, поверхности и объему. Примерами сплошных нагрузок могут служить сила давления воды на плотину, сила давления песка на ленту транспортера и т. д.

Из числа распределенных нагрузок рассмотрим только равномерно распределенные. Такие нагрузки условно изображаются в виде прямоугольника, в котором параллельные стрелки указывают, в какую сторону действует нагрузка (рис. 1.53, а). Равномерно распределенная нагрузка задается двумя параметрами — *интенсивностью* q , т. е. числом единиц силы (Н или кН), приходящихся на единицу длины (м), и *длиной* l . В задачах статики, где рассматриваются абсолютно недеформируемые (твердые) балки, равно-

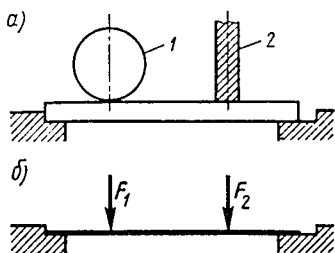


Рис. 1.52

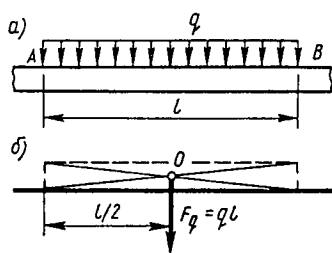


Рис. 1.53

мерно распределенную нагрузку можно заменять равнодействующей сосредоточенной силой F_q , численно равной произведению интенсивности q на длину l действия нагрузки, приложенной посередине длины l (рис. 1.53, б) и направленной в сторону действия q .

Кроме сил на балку иногда действуют пары сил, например, так, как показано на рис. 1.54, а. В подобном случае действие пары сил на балку измеряется, как известно, ее моментом $M = Fa$, который условно изображают круговой стрелкой (рис. 1.54, б).

Рассмотрим такой случай. Допустим, что балка удерживает на себе передвижной подъемный кран с грузом G_2 (рис. 1.55, а), причем сила тяжести самого крана G_1 приложена в точке O . Так как в данном случае действие сил G_1 и G_2 передается на балку через катки A и B , то при решении ряда задач для упрощения схемы нагрузки можно силы G_1 и G_2 привести к точке C , расположенной посередине между катками A и B . В результате приведения получим, что действие крана с грузом на балку эквива-

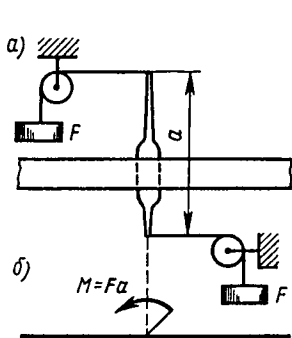


Рис. 1.54

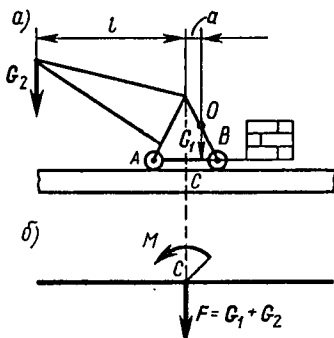


Рис. 1.55

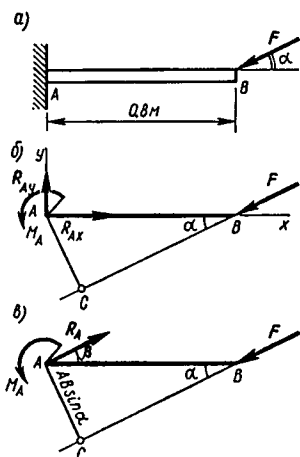


Рис. 1.56

лентно действию силы $F = G_1 + G_2$ и момента $M = M_C(G_1) + M_C(G_2)$ (рис. 1.55, б).

Пример 1.8. Жестко защемленная балка AB нагружена силой $F = 4$ кН, как показано на рис. 1.56, а. Определить реакции заделки, если $\alpha = 30^\circ$.

Решение. 1. Освободим балку от связи и заменим ее действие на балку силами R_{Ax} , R_{Ay} (составляющими полной реакции) и моментом M_A (рис. 1.56, б).

2. Расположив оси координат, как показано на рис. 1.56, б, для уравновешенной системы трех сил и момента составим три уравнения вида (1.34) (см. § 1.15):

$$\sum F_{kx} = 0; R_{Ax} - F \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; R_{Ay} - F \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_A(F_k) = 0; M_A - F \cdot AB \sin \alpha = 0.$$

3. Решив последовательно уравнения, определим:

$$R_{Ax} = F \cos \alpha = 4 \cos 30^\circ = 3,46 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = F \sin \alpha = 4 \sin 30^\circ = 2 \text{ кН};$$

$$M_A = F \cdot AB \sin \alpha = 4 \cdot 0,8 \sin 30^\circ = 1,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Для проверки правильности решения составим уравнение моментов относительно точки B

$$M_A - R_{Ay} AB = 0$$

и убедимся, что $1,6 - 2 \cdot 0,8 = 0$, т. е. задача решена правильно.

5. Если геометрически сложить силы R_{Ax} и R_{Ay} , то в данном случае

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(F \cos \alpha)^2 + (F \sin \alpha)^2} = \sqrt{F^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = F;$$

$$\beta = \arcsin \frac{R_{Ay}}{R_A} = \arcsin \frac{2}{4} = \arcsin 0,5 = 30^\circ = \alpha,$$

т. е. нагрузка F и реакция R_A образовали пару (F, R_A) , которая и уравновешивается реактивной парой с моментом $M_A = F \cdot AB \sin \alpha$ (рис. 1.56, в).

Пример 1.9. Балка AE с шарнирными опорами в точках A и B нагружена, как показано на рис. 1.57, а, моментом M , сосредоточенной силой F и на участке DE — равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Определить реакции опор.

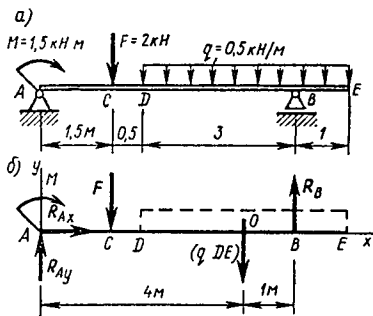


Рис. 1.57

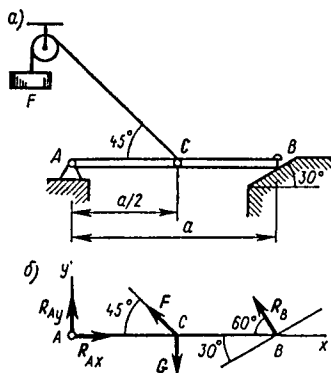


Рис. 1.58

Решение. 1. Заменим равномерно распределенную нагрузку ее равнодействующей $q \cdot DE$, приложенной посередине отрезка DE ($DE = DB + BE = 4$ м) в точке O ($DO = OE = DE/2 = 2$ м); освободим балку от связей, заменив их реакциями R_{Ax} , R_{Ay} и R_B , получим показанную на рис. 1.57, б действующую на балку уравновешенную систему сил.

2. Расположив оси x и y , как показано на рис. 1.57, б, составим уравнения равновесия вида (1.35):

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad -M - F \cdot AC - qDE \cdot AO + R_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_B(F_k) = 0; \quad -M - R_{Ay} \cdot BA - F \cdot BC + q \cdot DE \cdot BO = 0;$$

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} = 0.$$

3. Решая уравнения, получаем:
из первого

$$R_B = \frac{M + F \cdot AC + qDC \cdot AO}{AB} = \frac{1,5 + 2 \cdot 1,5 + 0,5 \cdot 4 \cdot 4}{5} = 2,5 \text{ кН},$$

из второго

$$R_{Ay} = \frac{-M + F \cdot BC + qDE \cdot BO}{BA} = \frac{-1,5 + 2 \cdot 3,5 + 0,5 \cdot 4 \cdot 1}{5} = 1,5 \text{ кН}.$$

Из третьего уравнения видим, что горизонтальная составляющая шарнирно неподвижной опоры $R_{Ax} = 0$. Следовательно, полная реакция этой опоры перпендикулярна балке и равна R_{Ay} . Это обстоятельство в данном случае объясняется тем, что нагрузки не стремятся сдвинуть балку в горизонтальном направлении.

4. Для проверки составим не использованное при решении уравнение

$$\sum F_k = R_{Ay} - F - q \cdot DE + R_A = 0$$

и увидим, что $1,5 - 2 - 0,5 \cdot 4 + 2,5 = 0$, т. е. задача решена правильно.

Пример 1.10. Чтобы облегчить открывание тяжелой крышки люка (рис. 1.58, а), к средней ее точке прикреплен гибкий трос с грузом F . При закрытом люке трос образует с плоскостью крышки

угол 45° . Определить реакции шарнира A и опоры B , если сила тяжести крышки приложена в точке C и равна F .

Решение. 1. На крышку люка кроме силы тяжести действует сила F , направленная вдоль троса. Освободив крышку от связей и заменив связи их реакциями, получим уравновешенную систему пяти сил, показанную на рис. 1.58, б.

2. Составим уравнения равновесия вида (1.34) (расположение осей x и y показано на рис. 1.56, б):

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - F \cos 45^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} + F \sin 45^\circ - G + R_B \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad F \frac{a}{2} \sin 45^\circ - G \frac{a}{2} + R_B a \sin 60^\circ = 0.$$

3. Учитывая, что $G = F$, из третьего уравнения находим:

$$R_B = \frac{F(1 - \cos 45^\circ)}{2 \sin 60^\circ} = 0,169F;$$

из второго уравнения

$$R_{Ay} = F(1 - \sin 45^\circ - 0,169 \sin 60^\circ) = 0,147F;$$

из первого уравнения

$$R_{Ax} = F(1 + 0,169 \cos 60^\circ) = 1,08F.$$

4. Для проверки решения самостоятельно составьте уравнения моментов сил относительно точки C и убедитесь, что эта сумма равна нулю.

Вычислите самостоятельно, с какой силой нужно потянуть вертикально вверх за рукоятку крышки у точки B , чтобы крышка начала подниматься. (*Ответ:* $\approx 0,15F$.)

§ 1.17. Реальные связи. Трение скольжения и его законы

Из физики известно, что при соприкосновении тел друг с другом всегда возникает сила трения, препятствующая передвижению одного тела по поверхности другого. При решении многих задач механики и рассмотрении равновесия тел часто оказывается невозможным пренебрегать действием сил трения. Поэтому кроме рассмотренных ранее идеальных связей (связей без трения) ознакомимся с *реальными связями* (связями с трением).

Если связь идеальная, то ее реакция направлена по нормали к поверхности или к кривой, ограничивающей свободу движения тела (рис. 1.59, а). Если же

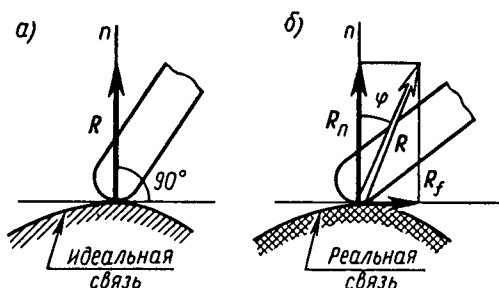


Рис. 1.59

тело опирается на поверхность реальной связи*, то ее реакция (рис. 1.59, б) отклоняется от нормали на некоторый угол φ . Таким образом, реакцию реальной связи можно рассматривать как геометрическую сумму составляющих — нормальной R_n и касательной R_f , которая и есть известная из физики сила трения.

Существенное отличие состояния равновесия при наличии только идеальных связей от состояния равновесия при реальных связях можно иллюстрировать такими примерами.

Брус AB , опирающийся на идеально гладкий пол в точке A и на такую же стену в точке B (рис. 1.60, а), не может находиться в равновесии, так как для трех действующих на него сил: силы тяжести G и двух реакций R_A и R_B , перпендикулярных соответственно

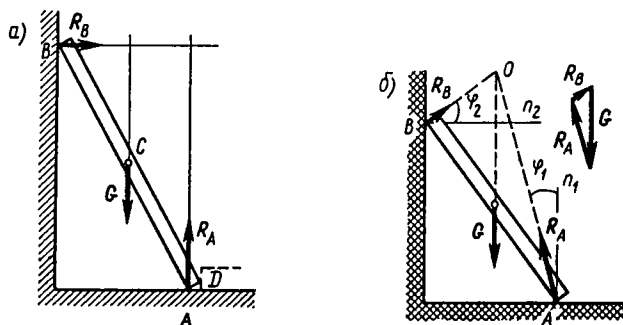


Рис. 1.60

* Чтобы в дальнейшем удобней было различать на рисунках идеальные и реальные связи, условимся реальные связи отмечать двойной штриховкой, как на рис. 1.59, б, а идеальные связи — обычной штриховкой, как на рис. 1.59, а.

полу и стене, не выполняется необходимое условие равновесия — линии действия этих сил не пересекаются в одной точке (см. § 1.2, следствие 2). Чтобы брус AB находился в равновесии, нужно наложить еще одну связь, например упереть брус у пола в выступ D (на рис. 1.60, a показан штриховой линией).

Из повседневного жизненного опыта известно, что брус AB (например, лестница), опираясь на реальные пол и стену, может оставаться в покое. В этом случае равновесие бруса объясняется тем, что реакции R_A и R_B реальных связей отклоняются от нормалей An_1 и Bn_2 к их поверхностям соответственно на некоторые углы φ_1 и φ_2 и линии действия трех сил (G , R_A и R_B) пересекаются в точке O (рис. 1.60, b). Известно и то, что брус AB теряет равновесие и соскальзывает на пол, если его прислонить к стене недостаточно круто. Для упрощения представим, что брус AB опирается в точке A на шероховатый пол (реальная связь), а в точке B — на гладкую стену (идеальная связь) и находится в равновесии, образуя с плоскостью пола некоторый угол α (рис. 1.61, a). Значит, линии действия трех сил G , R_A и R_B , приложенных к бруску, пересекаются в точке O , положение которой определяется следующим образом. Направление сил G и R_B известно (сила тяжести всегда направлена по вертикали, а реакция R_B идеальной связи перпендикулярна ее поверхности) и точка O лежит на пересечении линий действия этих сил. Соединив точку A — точку приложения реакции реальной связи — с точкой O , определим направление реакции R_A и увидим, что сила R_A отклонилась от нормали An к поверхности реальной связи на некоторый угол φ .

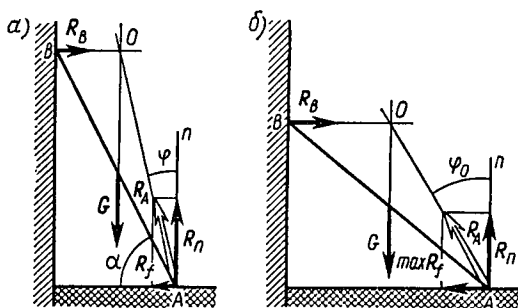


Рис. 1.61

Разложим реакцию R_A реальной связи на нормальную составляющую R_n , численно равную силе нормального давления бруса на пол, и касательную составляющую R_f — силу трения*. Легко заметить, что при увеличении угла α , образуемого брусом с поверхностью пола, угол φ уменьшается, а вместе с ним уменьшается сила трения и брус сохраняет равновесие. Если же угол α уменьшить, то φ — угол отклонения реакции R_A от нормали $Ап$ — увеличится, а вместе с ним увеличится и сила трения. При некотором наклоне бруса (определенном для материалов тел, соприкасающихся в точке A , и состояния их поверхности) он начинает скользить. Это означает, что сила трения отклонилась от нормали $Ап$ на максимальный угол $\varphi = \varphi_0$ (рис. 1.61, б) и дальше отклоняться не может; следовательно, при дальнейшем уменьшении наклона бруса линия действия реакции реальной связи R_A не будет проходить через точку O (точку пересечения двух других сил: G и R_B).

Угол φ_0 — максимальный угол, на который от нормали к поверхности реальной связи отклоняется ее реакция, называется *углом трения*. При отклонении реакции R_A на этот угол ее касательная составляющая, которая, как известно из физики, называется *статической силой трения* или силой трения покоя, достигает максимального значения $\max R_f$. Значение угла трения φ_0 зависит от материала соприкасающихся тел и состояния их поверхностей.

Из прямоугольника сил на рис. 1.61, б следует, что

$$\max R_f / R_n = \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (1.39)$$

Постоянное для двух соприкасающихся тел значение $\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$ называется *статическим коэффициентом трения*** или коэффициентом трения покоя, и из уравнения (1.39) следует равенство, выражающее известный из физики закон трения:

$$\max R_f = f_0 R_n, \quad (1.40)$$

* Если теперь, задавшись силой тяжести G и углом α , определить значения сил R_n , R_f и R_B , то увидим, что брус AB находится в равновесии под действием двух пар: (G, R_n) и (R_B, R_f) .

** Значения коэффициентов трения приводятся в различных физических или технических справочниках.

установленный Амонтоном опытным путем в 1699 г.* В менее общей форме закономерности, происходящие при трении, установлены и сформулированы гениальным итальянским ученым эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519). В 1781 г. экспериментальное исследование явления трения при относительном скольжении тел провел Кулон, а в 1851 г. результаты этих исследований уточнил Морен**.

Основные законы трения, установленные Амонтоном, Кулоном и Мореном, таковы:

1. *Сила трения действует в касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел и при движении направлена против относительного скольжения тела.*

2. *Статическая сила трения пропорциональна нормальной реакции [см. равенство (1.40)].*

3. *Статическая сила трения не зависит от размеров трущихся поверхностей.*

4. *Статический коэффициент трения зависит от материала соприкасающихся тел, физического состояния (влажности, температуры, степени загрязнения и т. д.) и качества обработки***.*

После начала скольжения тела коэффициент трения несколько уменьшается и принимает значение динамического коэффициента трения f . Следовательно

$$f < f_0. \quad (1.41)$$

Если в формулу (1.40) вместо f_0 подставить значение f , то

$$R_f = fR_n, \quad (1.42)$$

где R_f — сила трения скольжения.

* Гильом Амонтон (1663—1705) — член Парижской Академии наук.

** Шарль Огюстон Кулон (1736—1806), Артур Жюль Морен (1795—1880) — члены Парижской Академии наук.

*** Законы трения относятся к числу не очень точных. Обычно наблюдаются от них значительные отклонения. Например, при увеличении продолжительности неподвижного контакта соприкасающихся тел статический коэффициент трения возрастает, так как в месте контакта постепенно происходит пластическое изменение поверхностей обоих тел и площади их соприкосновения увеличиваются. Следовательно, размеры трущихся поверхностей влияют на статический коэффициент трения, а значит и на силу трения.

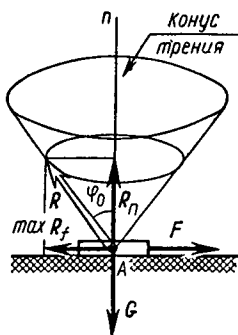


Рис. 1.62

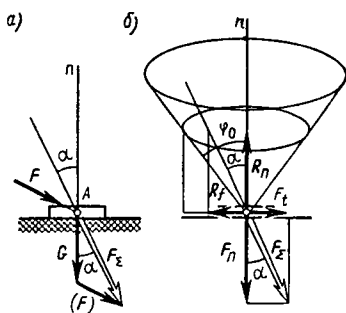


Рис. 1.63

При небольших скоростях скольжения сила трения скольжения R_f очень близка к $\max R_f$; кроме того, f почти не изменяется с изменением скорости скольжения. Поэтому при решении задач механики обычно используют формулу (1.42).

Если тело, опирающееся на шероховатую (реальную) поверхность, под действием внешних сил находится в покое, то такое равновесие объясняется тем, что внешние силы не могут преодолеть силы трения, т. е. наблюдается самоторможение. Рассмотрим условие, лежащее в основе этого явления.

Как мы уже знаем, при действии на тело некоторой сдвигающей силы F реакция R реальной связи может отклониться от вертикали к плоскости связи лишь на некоторый определенный угол φ_0 (угол трения), причем $\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$. Так как сдвигающая сила F может действовать параллельно плоскости связи в любую сторону, то представим себе, что мы поворачиваем силу F вокруг нормали An (рис. 1.62). Тогда отклонившаяся на постоянный угол φ_0 реакция R , оставаясь все время в плоскости нормали и вектора F , образует конус, который определяет любое из возможных положений реакции R реальной связи. Этот конус называется *конусом трения*.

Теперь представим, что тело лежит на шероховатой плоскости и на него кроме силы тяжести G действует сила F (рис. 1.63, а), стремящаяся сдвинуть тело по плоскости. Определим равнодействующую F_Σ сил F и G , сложив их по правилу треугольника, и пусть линия действия равнодействующей F_Σ образует с нормалью An угол α .

Разложим силу F_{Σ} на две составляющие: сдвигающую силу F_t и силу нормального давления F_n (рис. 1.63, б). В этом случае $R_f = F_t = F_{\Sigma} \sin \alpha$ и $R_n = F_n = F_{\Sigma} \cos \alpha$. Статическая сила трения $\max R_f = f_0 R_n = \operatorname{tg} \varphi_0 F_{\Sigma} \cos \alpha$.

Тело остается в покое до тех пор, пока

$$R_f < \max R_f,$$

т. е. пока

$$F_{\Sigma} \sin \alpha < \operatorname{tg} \varphi_0 F_{\Sigma} \cos \alpha.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi_0$ или

$$\alpha < \varphi_0. \quad (1.43)$$

Неравенство (1.43) выражает условие самоторможения тела на шероховатой (реальной) поверхности, которое формулируется так: *тело, лежащее на шероховатой поверхности, остается в покое до тех пор, пока линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к нему, проходит внутри конуса трения.*

Пример 1.11. К шероховатой вертикальной стене на нити AB подвешен шар. При каком значении коэффициента трения между стеной и шаром он сможет находиться в равновесии в положении, показанном на рис. 1.64, а?

Решение. 1. В положении, показанном на рис. 1.64, а, на шар действуют три силы: G — сила тяжести, R_B — реакция нити AB и R_C — реакция вертикальной шероховатой стены (рис. 1.64, б). При равновесии шара линии действия этих трех сил пересекаются в одной точке (см. § 1.2, теореме о равновесии трех сил). Так как линии действия сил G и R_B пересекаются в точке B , то и реакция R_C должна действовать на шар вдоль отрезка CB . Следовательно, реакция реальной связи в данном случае отклоняется на угол $\angle OCB = \varphi = 45^\circ$. Таким образом, равновесие шара в положении,

показанном на рис. 1.64, а, возможно при коэффициенте трения $f \geq \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

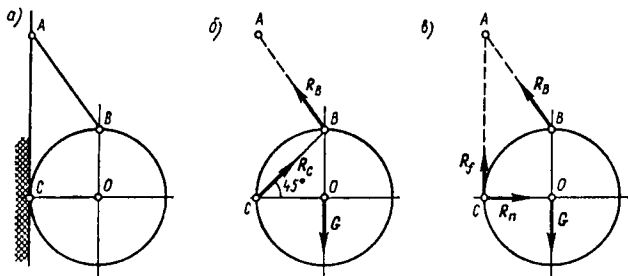


Рис. 1.64

Подобный коэффициент трения можно получить, например, при касании стенки, покрытой сукном, подвешенного на нити теннисного мяча.

2. Значения реакций R_B и R_C зависят от силы тяжести шара и длины нити AB . Если заданы G и длина AB , то значения R_B и R_C можно определить из геометрического (см. § 1.5) либо аналитического (1.18) условия равновесия системы сходящихся сил, либо из трех уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил (см. § 1.15). В последнем случае реакцию R_C следует представить в виде двух составляющих: R_f и R_n (рис. 1.64, в).

Например, при $AB=2r$, где r — радиус шара, в последнем случае получим $R_B=0,732G$, $R_f=R_n=0,336G$ ($R_C=0,518G$).

Решите задачу любым из трех указанных способов и проверьте правильность ответов.

Пример 1.12. Тело A поставлено на негладкую пластину BC , которую можно поворачивать около оси шарнира B (рис. 1.65, а). При каких значениях угла α тело A остается на пластине в покое?

Решение. 1. Если пластина образует с горизонтальной плоскостью угол α , то на тело A действуют три силы (рис. 1.65, б): G — сила тяжести, R_n — нормальная реакция пластины и сила трения, направленная вдоль пластины от A к C , причем эта сила может увеличиться только до некоторого значения $\max R_f$, зависящего от коэффициента трения.

2. Тело A находится в покое до тех пор, пока равнодействующая сил G и R_n , направленная вдоль пластины, остается меньше статической силы трения, т. е. пока

$$F_{\Sigma} < \max R_f = f_0 R_n.$$

Но $F_{\Sigma} = R_n \operatorname{tg} \alpha$ и $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, где φ_0 — угол трения.

Поэтому

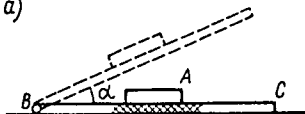
$$R_n \operatorname{tg} \alpha < R_n \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi_0$ или $\alpha < \varphi_0$.

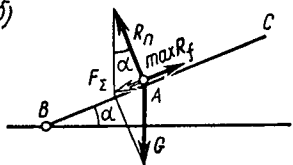
Тело A находится в покое до тех пор, пока угол наклона пластины меньше угла трения.

Наклонная плоскость называется самотормозящей, если поставленное на нее тело не скользит под действием силы тяжести.

а)



б)



в)

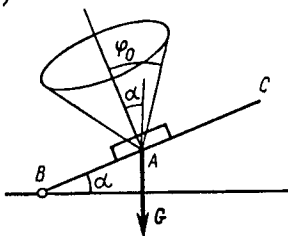


Рис. 1.65

Легко заметить, что условие самоторможения тела на наклонной плоскости не противоречит неравенству (1.43), значит и в этом случае линия действия силы тяжести (единственной активной силы, приложенной к телу A) проходит внутри конуса трения (рис. 1.65, в).

Вопросы для самопроверки

1. В чем сходство и в чем различие между главным вектором плоской системы сил и ее равнодействующей?

2. Какие уравнения (и сколько) можно составить для уравновешенной плоской системы сил?

3. Можно ли силу $F=10$ Н разложить на две параллельные составляющие, направленные в противоположные стороны, из которых одна 100 Н, а другая 110 Н? Если можно, то покажите, как это сделать.

4. Применима ли теорема Вариньона к плоской системе сходящихся сил?

5. К концу бруса длиной 1 м, жестко заделанному в стену, приложена сила 100 Н под углом 30° к брусу. Определите R и M_R заделки. (Задачу решить в уме, выполнив рисунок).

6. Какова зависимость между углом трения и коэффициентом трения?

7. Брус находится в равновесии, опираясь на гладкую вертикальную стену и шероховатый горизонтальный пол; сила тяжести бруса приложена посередине. Можно ли определить направление полной реакции пола?

ГЛАВА 5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1.18. Сложение пространственной системы сходящихся сил. Условие равновесия

Система сил, линии действия которых расположены как угодно в пространстве, называется *пространственной*.

Если к приложенным к точке A силам F_1 и F_2 добавить силу F_3 , не лежащую в плоскости Π действия двух первых сил, то получим простейшую (в количественном отношении) пространственную систему сходящихся сил (рис. 1.66, а). Определим равнодействующую этих сил. Сначала построим параллелограмм $ABEC$ на силах $F_1=AB$ и $F_2=AC$ (рис. 1.66, б), его диагональ

$$\overline{AE} = F_1 + F_2.$$

Сложим \overline{AE} с силой $F_3=\overline{AD}$ и построим параллелограмм $AEKD$, его диагональ

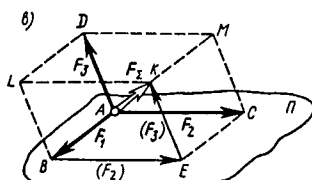
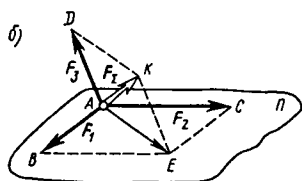
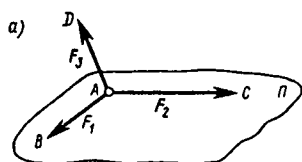


Рис. 1.66

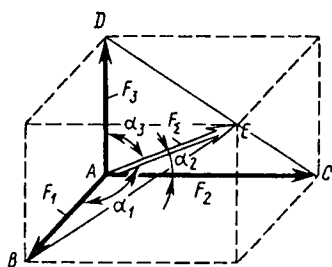


Рис. 1.67

$$\overline{AK} = F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3. \quad (1.44)$$

Векторное равенство (1.44) выражает *правило параллелепипеда* при сложении приложенных к точке трех сил, не лежащих в одной плоскости.

Параллелограмм $ABEC$ образует одну из граней параллелепипеда, в котором параллелограмм

$AEKD$ является диагональным сечением (рис. 1.66, в), а заданные силы $F_1 = AB$, $F_2 = AC$ и $F_3 = AD$ — ребрами одного из его трехгранных углов. Таким образом, *равнодействующая пространственной системы трех сил, сходящихся в одной точке, приложена в той же точке и равна по модулю и направлению диагонали параллелепипеда, ребра которого равны и параллельны заданным силам.*

Строить параллелепипед не обязательно, можно ограничиться построением пространственного силового многоугольника. На рис. 1.66, в, например, видно, что модуль и направление $F_{\Sigma} = AK$ при сложении сил в порядке $F_1 + F_2 + F_3$ соответствуют замыкающей стороне многоугольника $ABEK$. Сложению сил в порядке $F_1 + F_3 + F_2$ соответствует пространственный многоугольник $ABLK$, в порядке $F_3 + F_2 + F_1$ — многоугольник $ADMK$ и т. д.

В частном случае, имеющем широкое практическое применение, три силы F_1 , F_2 и F_3 действуют на точку, образуя друг с другом прямые углы (рис. 1.67).

Тогда при их сложении образуется прямоугольный параллелепипед. Используя известную из геометрии теорему о зависимости длины диагонали прямоугольного параллелепипеда от трех его измерений и помня, что при построении векторов $\mathbf{F}_1 = \overline{AB}$, $\mathbf{F}_2 = \overline{AC}$ и $\mathbf{F}_3 = \overline{AD}$ их модули пропорциональны длинам изображающих их отрезков, можно записать:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}, \quad (1.45)$$

т. е. *модуль равнодействующей трех сходящихся сил, расположенных в пространстве перпендикулярно друг другу, равен корню квадратному из суммы квадратов модулей этих сил.*

Направление равнодействующей \mathbf{F}_{Σ} определяется углами (рис. 1.67) $\alpha_1 = (\mathbf{F}_{\Sigma}, \mathbf{F}_1)$, $\alpha_2 = (\mathbf{F}_{\Sigma}, \mathbf{F}_2)$ и $\alpha_3 = (\mathbf{F}_{\Sigma}, \mathbf{F}_3)$. Эти углы найдем, рассмотрев последо-

вательно прямоугольные треугольники ABE , ACE и ADE , в каждом из которых диагональ параллелепипеда $\mathbf{F}_{\Sigma} = \overline{AE}$ является гипотенузой:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= F_1 / F_{\Sigma}; \quad \cos \alpha_2 = F_2 / F_{\Sigma} \quad \text{и} \\ \cos \alpha_3 &= F_3 / F_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

С использованием параллелепипеда сил решается и обратная задача — задача разложения силы на три составляющие по заданным или выбранным направлениям. При решении задач с пространственным относительно друг друга расположением сил обычно оказывается целесообразным разложение силы на три составляющие, направленные параллельно выбранным (заданным) осям координат или непосредственно вдоль осей.

На рис. 1.68 показано разложение силы $\mathbf{F} = \overline{AB}$ на три составляющие силы при условии, что заданы углы α_x , α_y и α_z , образуемые силой \mathbf{F} с направлениями составляющих, параллельных осям x , y и z . Приняв вектор $\mathbf{F} = \overline{AB}$ за диагональ, построим на нем прямоугольный параллелепипед с расположением граней параллельно координатным плоскостям xOy , xOz , yOz и получим искомые составляющие $\mathbf{F}_x = \overline{AC}$,

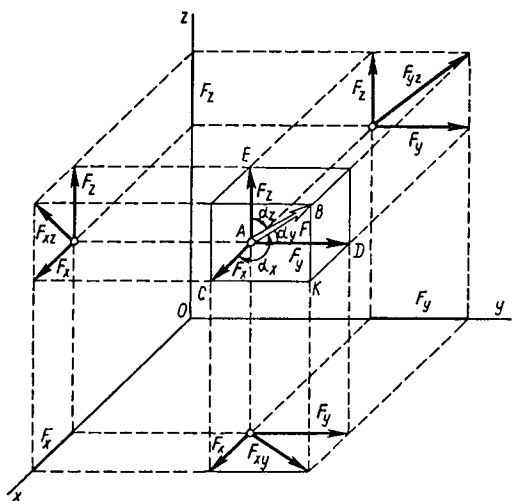


Рис. 1.68

$F_y = \overline{AD}$ и $F_z = \overline{AE}^*$, модули которых

$$F_x = F \cos \alpha_x, \quad F_y = F \cos \alpha_y, \quad \text{и} \quad F_z = F \cos \alpha_z. \quad (1.47)$$

Спроецировав параллелепипед сил на координатные плоскости, получим проекции F_{xy} , F_{xz} и F_{yz} силы F на каждую из плоскостей; затем легко определить и проекции F_x , F_y и F_z силы F на соответствующие оси координат (рис. 1.68), которые при заданных углах α_x , α_y и α_z находим так же, как и модули составляющих сил, т. е. по формулам (1.47).

Если проекция силы F на ось — величина алгебраическая (скалярная), то проекция силы на плоскость — вектор (поэтому проекции F_{xy} , F_{xz} и F_{yz} на рис. 1.68 имеют на концах стрелки), так как расположение каждой проекции на плоскости зависит от положения диагонального сечения параллелепипеда относительно двух других осей. Поэтому положение вектора $F = OA$ относительно осей координат может быть задано, например (рис. 1.69), углом $\alpha_z = (\hat{F}, z)$ и

* Подробное описание порядка построения параллелепипеда и дальнейшие построения здесь не приводятся, так как предполагается, что читатель владеет необходимыми навыками проекционного черчения.

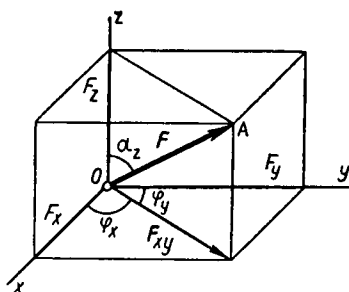


Рис. 1.69

одним из углов φ_x или φ_y , образуемых плоскостью AOZ с одной из координатных плоскостей: xOy или yOz .

Спроецировав вектор $\overline{OA} = F$ сначала на плоскость xOy , найдем затем проекции силы F на оси:

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi_x = F \sin \alpha_z \cos \varphi_x; \\ F_y = F_{xy} \cos \varphi_y = F \sin \alpha_z \cos \varphi_y; \quad F_z = F \cos \alpha_z.$$

Равнодействующая любого числа сходящихся сил, расположенных в пространстве, равна замыкающей стороне многоугольника, стороны которого равны и параллельны заданным силам (правило силового многоугольника).

Например, на рис. 1.70, а изображено геометрическое сложение пяти сил: равнодействующая $F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$ по модулю и направлению соответствует замыкающей стороне \overline{AE} силового многоугольника $OABCDE$, в котором $\overline{OA} = F_1$, $\overline{AB} = F_2$, $\overline{BC} = F_3$, $\overline{CD} = F_4$ и $\overline{DE} = F_5$.

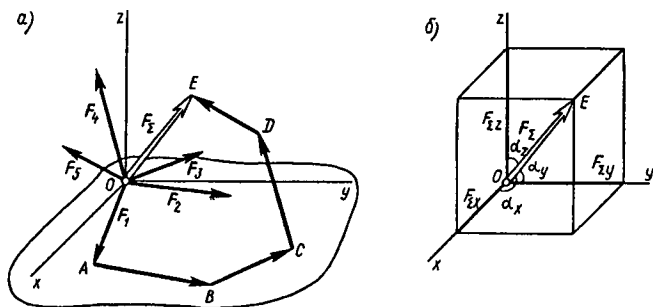


Рис. 1.70

Равнодействующую пространственной системы сходящихся сил, так же как и при действии их в одной плоскости, проще и точнее определять аналитически — методом проекций. Отличие состоит в том, что теперь силы проецируются на три оси координат. Сложив алгебраически проекции сил на каждую из осей координат, получим проекции искомой равнодействующей:

$$F_{\Sigma x} = \sum F_{kx}; \quad F_{\Sigma y} = \sum F_{ky}; \quad F_{\Sigma z} = \sum F_{kz}, \quad (1.48)$$

которые изображают ребра прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.70, б) с диагональю $\overline{OE} = F_{\Sigma}$. Поэтому модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2 + F_{\Sigma z}^2}. \quad (1.49)$$

Направление F_{Σ} , т. е. углы $\alpha_x = (\widehat{F_{\Sigma}, x})$, $\alpha_y = (\widehat{F_{\Sigma}, y})$ и $\alpha_z = (\widehat{F_{\Sigma}, z})$, находим по формулам

$$\begin{aligned} \cos \alpha_x &= F_{\Sigma x} / F_{\Sigma}; \quad \cos \alpha_y = F_{\Sigma y} / F_{\Sigma} \quad \text{и} \\ \cos \alpha_z &= F_{\Sigma z} / F_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Если $F_{\Sigma} = 0$, то сходящаяся система сил уравновешена и многоугольник сил замкнут (геометрическое условие равновесия). Но при этом должна быть равна нулю каждая из трех проекций равнодействующей. Таким образом, аналитическое условие равновесия пространственной системы сходящихся сил выражается тремя уравнениями:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0 \quad \text{и} \quad \sum F_{kz} = 0, \quad (1.51)$$

т. е. для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из трех осей координат были равны нулю.

Пример 1.13. Тренога $ABCD$ шарнирно опирается на горизонтальную плоскость в точках A , B и C (рис. 1.71, а). В точке D тренога имеет блок. Через блок перекинут гибкий трос, один конец которого закреплен в точке E стены, а к другому прикреплен груз $F = 10$ кН. Определить реакции стержней треноги.

Решение. 1. Пренебрегая размерами блока, считаем, что заданные силы и искомые реакции стержней приложены к точке D — вершине трехгранной пирамиды, образуемой треногой. На точку D действуют вертикально вниз и горизонтально влево

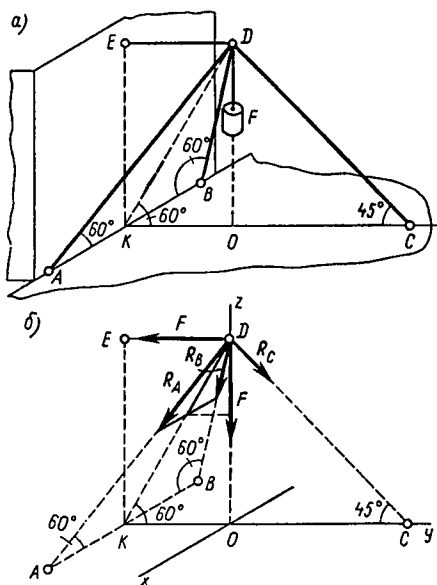


Рис. 1.71

натяжения ветвей троса, равные силе тяжести груза F , а также три реакции R_A , R_B и R_C стержней треноги.

2. Систему пяти сил, действующих на точку D , в выбранных осях координат изобразим на рис. 1.71, б; реакции R_A , R_B и R_C стержней направлены вдоль стержней от точки D (из предположения, что все стержни растянуты).

3. Приступая к составлению уравнений равновесия, следует заметить, что силы, лежащие в плоскости, перпендикулярной какой-либо оси, проецируются на эту ось в виде точки (т. е. проекции равны нулю). Например, обе силы F (вертикальная и горизонтальная) и сила R_C лежат в плоскости, перпендикулярной оси x . Поэтому на ось x проецируются лишь силы R_A и R_B . Рассуждая аналогично, видим, что на ось y проецируются все силы, кроме вертикальной силы F , и на ось z — также все силы, за исключением горизонтальной силы F .

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; \quad R_A \sin(\widehat{ADK}) - R_B \sin(\widehat{BDK}) = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \quad R_C \sin(\widehat{ODC}) - R_A \cos(\widehat{ADK}) \sin(\widehat{KDO}) - \\ &\quad - R_B \cos(\widehat{BDK}) \sin(\widehat{KDO}) - F = 0; \\ \sum F_{kz} &= 0; \quad -R_C \cos(\widehat{ODC}) - F = 0 \end{aligned}$$

$$-R_A \cos(\widehat{ADK}) \cos(\widehat{KDO}) - R_B \cos(\widehat{BDK}) \cos(\widehat{KDO}) = 0.$$

Так как $\widehat{ADK} = \widehat{BDK} = \widehat{KDO} = 30^\circ$ и $\widehat{ODC} = 45^\circ$, из первого уравнения находим, что

$$R_A = R_B.$$

Второе и третье уравнения запишем теперь в виде

$$R_C \sin 45^\circ - 2R_A \cos 30^\circ \sin 30^\circ - F = 0;$$

$$-R_C \cos 45^\circ - F - 2R_A \cos^2 30^\circ = 0.$$

Складывая эти уравнения и учитывая, что $\sin 30^\circ = 0,5$ и $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, получаем

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} R_A - \frac{3}{2} R_A - 2F = 0.$$

Отсюда

$$R_A = R_B = -\frac{4F}{\sqrt{3} + 3} = -\frac{40}{4,73} = -8,44 \text{ кН}.$$

Стержни AD и BD треноги сжаты силой 8,44 кН.

Теперь, зная R_A , найдем

$$R_C = \frac{R_A \cos 30^\circ + F}{\sin 45^\circ} = \frac{-8,44 \cos 30^\circ + 10}{\sin 45^\circ} = 3,82 \text{ кН}.$$

Стержень CD растянут силой 3,82 кН.

§ 1.19. Момент силы относительно оси

Пространственное расположение сил, приложенных к телу или к точке,—распространенное явление, и поэтому во всех задачах механики на рассматриваемые тела действуют пространственные системы сил. Реально действующая на тело плоская система сил—явление исключительное, но к такой системе, ради упрощения решения задачи, обычно сводят пространственную систему с симметричным расположением сил относительно какой-либо плоскости. Например, задачу с пятью пространственными сходящимися силами, рассмотренными в примере 1.13 (см. § 1.18), можно свести к эквивалентной системе из четырех сил, расположенных в плоскости $EKCD$, заменив реакции R_A и R_B их равнодействующей, которая благодаря симметричному действию сил направлена по линии DK . (После того как эта

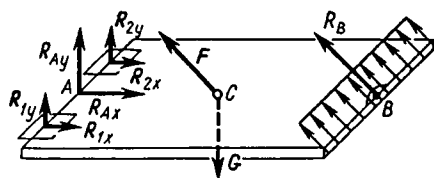


Рис. 1.72

равнодействующая определена, легко разложить ее на искомые составляющие R_A и R_B и вычислить их модули.)

В примере 1.10 (см. § 1.16) рассмотрена плоская система сил, эквивалентная пространственной системе (рис. 1.72), которая и действует на крышку люка; сила R_B есть не что иное, как равнодействующая равномерно распределенной реакции опоры, действующей на переднее ребро крышки люка по всей ее длине, а силы R_{Ax} , R_{Ay} — равнодействующие соответственно равных по модулю сил R_{1x} , R_{2x} и R_{1y} , R_{2y} — горизонтальных и вертикальных составляющих реакций петель, которыми крышка прикреплена к полу. Если за рукоятку B потянуть крышку вертикально вверх, то она начнет поворачиваться около оси, проходящей через петли, при этом действие силы F помогает поворачивающей силе, а сила тяжести препятствует.

Таким образом, при рассмотрении пространственной системы сил необходимо ввести понятие о моменте силы относительно оси.

Пусть сила F приложена к точке D на верхней грани тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, и направлена не перпендикулярно поверхности этой грани (рис. 1.73). Разложим силу F на три составляющие F_x , F_y и F_z , направленные параллельно осям x , y и z , расположенным вдоль ребер параллелепипеда. Из рисунка видно, что сила F производит на тело относительно выбранных осей сложные воздействия: составляющая F_x стремится повернуть тело вокруг ребер OA (ось y) и OC (ось z), составляющая F_y стремится повернуть тело вокруг ребра OB (ось x), а также ребра OC (ось z), но в противоположную сторону, чем составляющая F_x , составляющая F_z стремится повернуть тело вокруг ребер OA (ось y) и OB (ось x).

Значит, вращающий эффект относительно какой-

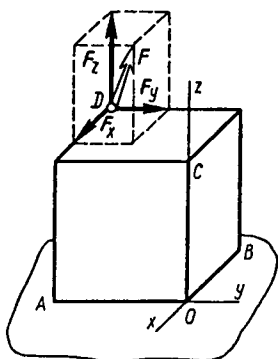


Рис. 1.73

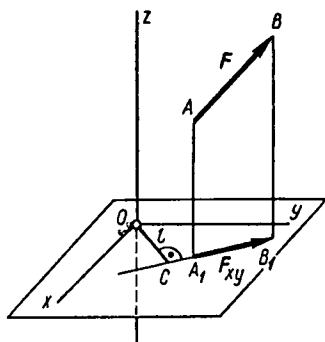


Рис. 1.74

либо оси создает та составляющая силы F , которая лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси. Но составляющая силы F , параллельная плоскости, равна проекции силы F на ту же плоскость (рис. 1.73). Поэтому, обозначив момент силы F относительно осей $M_x(F)$, $M_y(F)$ и $M_z(F)$, можем записать:

$$M_x(F) = \pm F_{yz}l; \quad M_y(F) = \pm F_{xz}l \quad \text{и} \quad M_z(F) = \pm F_{xy}l, \quad (1.52)$$

где F_{yz} , F_{xz} и F_{xy} — модули проекций сил на плоскости, перпендикулярные той оси, относительно которой определяется момент*; l — плечи, равные длинам перпендикуляров от точки пересечения оси с плоскостью до проекции или ее продолжения; знак плюс или минус ставится в зависимости от того, в какую сторону поворачивается плечо l вектором проекции, если смотреть на плоскость проекции со стороны положительного направления оси; при стремлении вектора проекции повернуть плечо против хода часовой стрелки момент условимся считать положительным и наоборот.

Следовательно, моментом силы относительно оси называется алгебраическая (скалярная) величина, равная моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Рис. 1.74 иллюстрирует последовательность опре-

* За плоскость проекций не обязательно принимать плоскость, в которой лежат две другие оси. Это может быть любая параллельная ей плоскость.

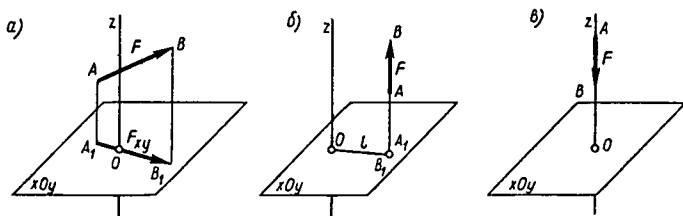


Рис. 1.75

деления момента силы F относительно оси z . Если задана сила и выбрана (или задана) ось, то: а) перпендикулярно оси выбирают плоскость, (плоскость xOy); б) силу F проецируют на эту плоскость и определяют модуль F_{xy} этой проекции; в) из точки O пересечения оси с плоскостью опускают перпендикуляр OC к проекции F_{xy} и определяют плечо $l = OC$; г) глядя на плоскость xOy со стороны положительного направления оси z (т. е. в данном случае сверху), видим, что OC поворачивается вектором F_{xy} против хода стрелки часов, значит

$$M_z(F) = F_{xy}l.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости (рис. 1.75); а) сила F пересекает ось (в этом случае $l=0$); б) сила F параллельна оси ($F_{xy}=0$); в) сила F действует вдоль оси ($l=0$ и $F_{xy}=0$).

Пример 1.14. К вершине A прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.76) приложены силы $F_1 = 200$ Н и $F_2 = 300$ Н. Определить моменты сил относительно каждой из трех осей.

Решение выполните самостоятельно и убедитесь, что $M_x(F_1) = M_y(F_1) = 141$ Н·м; $M_z(F_1) = -99$ Н·м; $M_x(F_2) = -172$ Н·м; $M_y(F_2) = 172$ Н·м; $M_z(F_2) = -120$ Н·м.

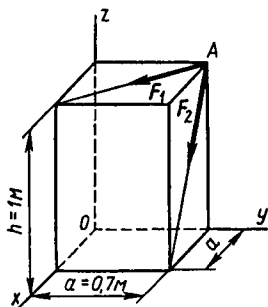


Рис. 1.76

§ 1.20. Произвольная пространственная система сил.

Условие равновесия

В § 1.12 подробно изложен процесс приведения сил к точке и доказано, что любая плоская система сил приводится к силе — главному вектору и паре, момент которой называется главным моментом. Причем эквивалентные данной

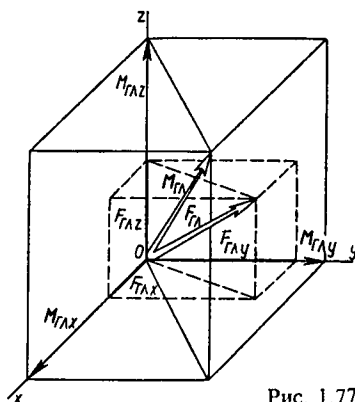


Рис. 1.77

системе сил сила и пара действуют в той же плоскости, что и заданная система. Значит, если главный момент изобразить в виде вектора (см. § 1.7), то главный вектор и главный момент плоской системы сил всегда перпендикулярны друг другу.

Рассуждая аналогично, можно последовательно привести к точке силы пространственной системы. Но теперь главный вектор есть замыкающий вектор пространственного (а не плоского) силового многоугольника; главный момент уже нельзя получить алгебраическим сложением моментов данных сил относительно точки приведения. При приведении к точке пространственной системы сил присоединенные пары действуют в различных плоскостях и их моменты целесообразно представлять в виде векторов и складывать геометрически. Поэтому полученные в результате приведения пространственной системы сил **главный вектор** (геометрическая сумма сил системы) и **главный момент** (геометрическая сумма моментов сил относительно точки приведения), вообще говоря, не перпендикулярны друг другу.

Допустим, что заданная произвольная пространственная система сил приведена к точке и получены главный вектор \mathbf{F}_{gl} и главный момент \mathbf{M}_{gl} (рис. 1.77). Спроецируем \mathbf{F}_{gl} на оси координат, тогда [см. равенство (1.49)] модуль главного вектора

$$F_{gl} = \sqrt{F_{glx}^2 + F_{gly}^2 + F_{glz}^2}, \quad (1.53)$$

где каждая из проекций главного вектора на оси равна алгебраической сумме проекций всех сил

системы на ту же ось, т. е.

$$F_{г\lambda x} = \sum F_{kx}; \quad F_{г\lambda y} = \sum F_{ky}; \quad F_{г\lambda z} = \sum F_{kz}. \quad (1.54)$$

Разложим вектор главного момента $M_{г\lambda}$ на три составляющих вектора $M_{г\lambda x}$, $M_{г\lambda y}$ и $M_{г\lambda z}$, модуль каждого из которых равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно соответствующей оси*. Следовательно, модуль главного момента

$$M_{г\lambda} = \sqrt{M_{г\lambda x}^2 + M_{г\lambda y}^2 + M_{г\lambda z}^2}, \quad (1.55)$$

где, как сказано выше,

$$M_{г\lambda x} = \sum M_x(F_k); \quad M_{г\lambda y} = \sum M_y(F_k); \quad M_{г\lambda z} = \sum M_z(F_k). \quad (1.56)$$

Направления главного вектора и главного момента, т. е. углы, образуемые ими с осями координат, находим с помощью формул, аналогичных (1.50).

Когда пространственная система сил приводится к силе и к паре, возможны четыре окончательных результата:

1. $F_{г\lambda}$ и $M_{г\lambda}$ перпендикулярны друг другу (рис. 1.78). В этом случае система сил приводится к равнодействующей силе F_{Σ} , равной главному вектору $F_{г\lambda}$, причем линия действия этой равнодействующей проходит через точку C , лежащую на прямой, перпендикулярной плоскости, в которой расположены векторы $F_{г\lambda}$ и $M_{г\lambda}$ на расстоянии от точки O $OC = M_{г\lambda}/F_{\Sigma}$.

2. $F_{г\lambda}$ и $M_{г\lambda}$ не перпендикулярны друг другу (рис. 1.79, а). В этом случае система сил не приводится к равнодействующей. Действительно, разложим вектор $M_{г\lambda}$ на два составляющих вектора $M_{г\lambda 1}$ и $M_{г\lambda 2}$ (рис. 1.79, б). Вектор $M_{г\lambda 2}$, перпендикулярный $F_{г\lambda}$, эквивалентен паре, действующей в плоскости главного вектора, поэтому, изобразив момент $M_{г\lambda 2}$ парой $(F'_{г\lambda}, F_{г\lambda})$ с плечом $OC = M_{г\lambda 2}/F_{г\lambda}$ (рис. 1.79, в), видим, что силы $F_{г\lambda}$ и $F'_{г\lambda}$, действующие по прямой, проходя-

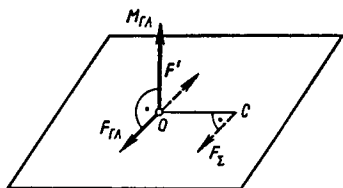


Рис. 1.78

* Доказательство справедливости этого утверждения можно отыскать в [2, 8, 11].

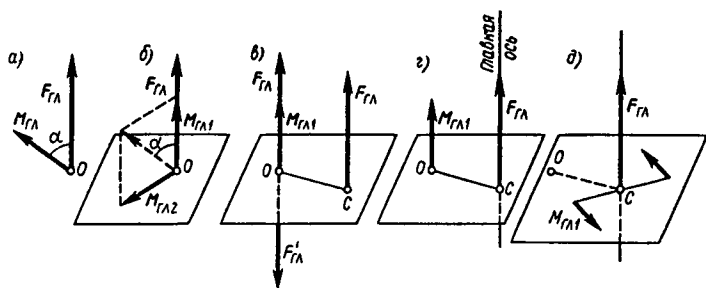


Рис. 1.79

щей через точку O , взаимно уравниваются.

Остаются пара с моментом M_{GL1} и главный вектор, действующий вдоль проходящей через точку C прямой, которая называется *главной осью данной системы сил* (рис. 1.79, г). Изобразив теперь момент M_{GL1} в виде пары, как на рис. 1.79, д, получим систему силы и пары, которая называется *динамическим винтом*.

3. $F_{GL} = 0$, $M_{GL} \neq 0$ — система сил эквивалентна паре сил.

4. $F_{GL} = 0$, $M_{GL} = 0$ — система сил уравновешена.

Векторные равенства

$$F_{GL} = 0 \text{ и } M_{GL} = 0 \quad (1.57)$$

выражают *необходимое и достаточное условие равновесия произвольной пространственной системы сил*.

Если главный вектор равен нулю, то его проекции на три взаимно перпендикулярные оси также равны нулю; если главный момент равен нулю, то равны нулю и три его составляющие на те же оси. Поэтому из уравнений (1.54) и (1.56) имеем

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & \sum M_x(F_k) &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0, & \sum M_y(F_k) &= 0; \\ \sum F_{kz} &= 0, & \sum M_z(F_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

Значит, произвольная плоская система сил статически определима лишь в том случае, когда число неизвестных не превышает шести.

Среди задач статики часто встречаются такие, в которых на тело действует пространственная система параллельных друг другу сил (рис. 1.80). Тогда, расположив оси координат так, чтобы одна из них

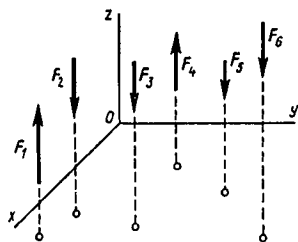


Рис. 1.80

либо со знаком плюс, либо со знаком минус; в) моменты сил относительно оси, параллельной силам, равны нулю, и уравнения моментов относительно этой оси превращаются в тождество вида $0=0$.

Следовательно, для пространственной системы параллельных сил можно составить только три уравнения — одно уравнение проекций на ось, параллельную силам, и два уравнения моментов относительно двух других осей. Например, для системы сил на рис. 1.80

$$\sum F_{kz} = 0; \quad \sum M_x(F_k) = 0; \quad \sum M_y(F_k) = 0. \quad (1.59)$$

В пространственной системе параллельных сил неизвестных должно быть не больше трех, иначе задача становится статически неопределимой.

Пример 1.15. Жестко заделанная балка длиной $l=1,4$ м и квадратным поперечным сечением со стороной $a=0,2$ м нагружена, как показано на рис. 1.81, а, горизонтальной силой $F=2$ кН и вертикальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=1$ кН/м. Определить реакции заделки.

Решение. 1. Освободим балку от заделки. Известно, что со стороны заделки на балку действуют реактивные силы и пара сил. Реактивную силу представим в виде трех составляющих R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Oz} (рис. 1.81, б), действующих вдоль осей координат, а реактивный момент — в виде моментов пар M_{Ox} , M_{Oy} и M_{Oz} , действующих в плоскостях, перпендикулярных осям (эти моменты изображены на рис. 1.81, б круговыми стрелками, огибающими оси против хода стрелки часов, если смотреть со стороны положительного направления оси).

2. Равномерно распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой $F_q = ql = 1 \cdot 1,4$ кН = 1,4 кН.

3. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ox} - F = 0; \quad \sum M_x(F_k) = 0; \quad M_{Ox} + F_q l / 2 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Oy} - F_q = 0; \quad \sum M_y(F_k) = 0; \quad M_{Oy} - F_q l / 2 = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad R_{Oz} = 0; \quad \sum M_z(F_k) = 0; \quad M_{Oz} - F_q a / 2 = 0.$$

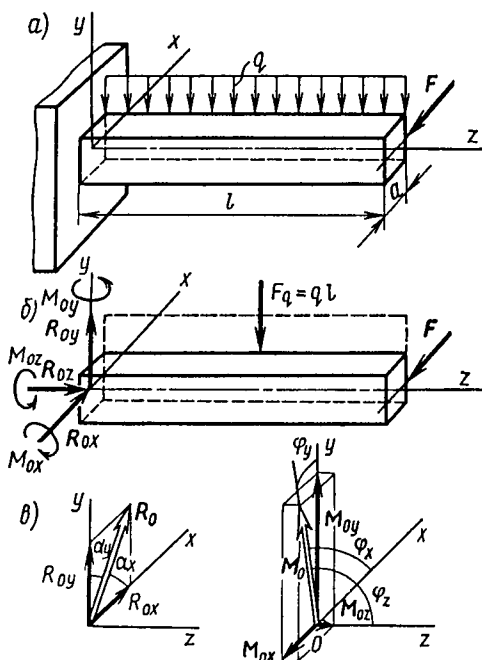


Рис. 1.81

4. Решая уравнения, находим:

$$R_{0x} = 2 \text{ кН}; R_{0y} = 1,4 \text{ кН}; R_{0z} = 0;$$

$$M_{0x} = -0,98 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{0y} = 2,8 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{0z} = 0,14 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. По найденным модулям составляющих реактивной силы \mathbf{R}_0 и момента реактивной пары \mathbf{M}_0 (они показаны на рис. 1.81, в раздельно) можно определить их модули R_0 и M_0 и направление действия. Эту часть задачи решите самостоятельно и убедитесь, что

$$R = 2,44 \text{ кН}; \alpha_x \approx 35^\circ; \alpha_y \approx 55^\circ; \alpha_z = 90^\circ;$$

$$M_0 = 2,83 \text{ кН} \cdot \text{м}; \varphi_x = 110^\circ 20'; \varphi_y = 12^\circ 40'; \varphi_z = 87^\circ 10'.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие уравнения и сколько можно составить для уравновешенной пространственной системы сходящихся сил?

2. Почему при определении момента силы относительно оси нужно обязательно проецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси?

3. Как нужно расположить ось, чтобы момент данной силы относительно этой оси равнялся нулю?

4. Какие уравнения и сколько можно составить для уравновешенной системы параллельных сил, расположенных в пространстве?

5. Какие уравнения и сколько можно составить для уравновешенной системы сил, расположенных в пространстве как угодно?

ГЛАВА 6. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 1.21. Центр параллельных сил

Представим, что к трем точкам A_1 , A_2 и A_3 твердого тела приложены параллельные силы F_1 , F_2 и F_3 , образующие пространственную систему (рис. 1.82, а). Как известно из § 1.13, равнодействующая двух параллельных сил равна по модулю сумме их модулей, а линия действия делит расстояние между точками приложения слагаемых сил на отрезки, обратно пропорциональные силам [см. формулу (1.32)].

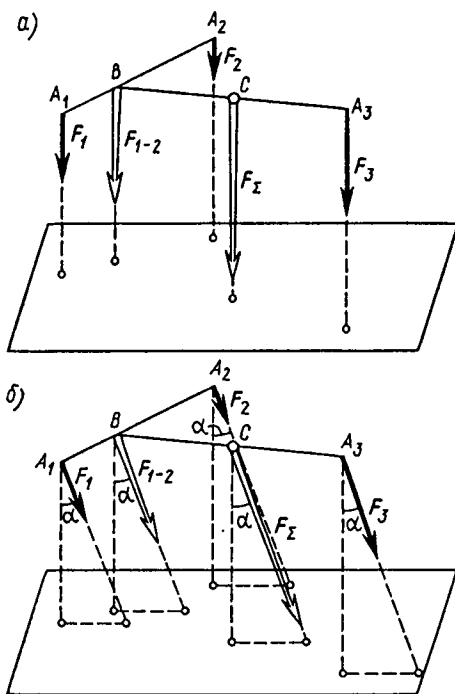


Рис. 1.82

Сложив силы F_1 и F_2 , получим равнодействующую F_{1-2} с модулем $F_{1-2} = F_1 + F_2$ и приложенную в точке B , причем

$$F_1/BA_2 = F_2/A_1B = F_{1-2}/A_1A_2. \quad (a)$$

Сложив далее силы F_{1-2} и F_3 , получим равнодействующую трех данных сил $F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3$, приложенную в точке C , лежащей на отрезке BA_3 и делящей его на две части согласно той же зависимости (1.32):

$$F_{1-2}/CA_3 = F_3/BC = F_\Sigma/BA_3. \quad (б)$$

Точка C , через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил, называется *центром параллельных сил*.

Центр параллельных сил не меняет своего положения относительно точек приложения данных сил, если все силы, не нарушая их параллельности, повернуть на один и тот же угол.

Действительно, если повернуть силы F_1 , F_2 и F_3 на угол α , не изменив их параллельности (рис. 1.82, б), то, повторив последовательное сложение сил, увидим, что равнодействующая F_{1-2} окажется приложенной в той же точке B , так как соотношение (а) сохраняет свою силу. При сложении F_{1-2} и F_3 зависимость (б) также не изменится, значит положение точки C — центра параллельных сил F_1 , F_2 и F_3 — относительно точек A_1 , A_2 и A_3 останется прежним.

Это важное свойство центра параллельных сил, рассмотренное для трех сил, справедливо для системы с любым числом параллельных сил.

Если тело, на которое в точках $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$ действуют параллельные силы $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n$, связать с системой координатных осей так, чтобы одна из осей была параллельна силам (рис. 1.83), то, зная координаты точек приложения сил $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_k(x_k, y_k, z_k), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$, легко определить координаты центра параллельных сил:

$$C(x_C, y_C, z_C).$$

Как известно, равнодействующей называется сила, эквивалентная данной системе сил, т. е. равнодействующая F_Σ , приложенная в точке C , производит на тело такое же действие, как и вся система сил $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n$. Значит, согласно теореме Вариньона

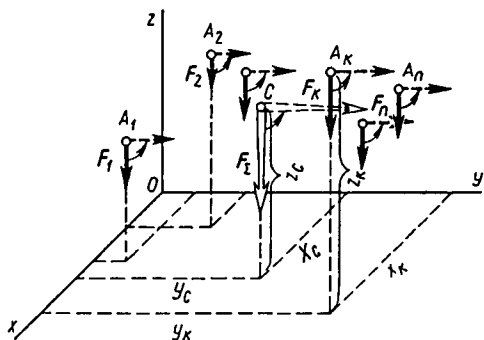


Рис. 1.83

(см. § 1.13), момент равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов сил относительно той же оси.

Определим моменты сил относительно оси y . Из рис. 1.83 следует, что $M_y(F_\Sigma) = F_\Sigma x_C$, $M_y(F_1) = F_1 x_1$, ..., $M_y(F_k) = F_k x_k$, ..., $M_y(F_n) = F_n x_n$.

Так как $M_y(F_\Sigma) = \sum M_y(F_k)$, то $F_\Sigma x_C = \sum F_k x_k$, где k принимает последовательно значения от 1 до n .

Отсюда

$$x_C = \sum F_k x_k / F_\Sigma,$$

где $F_\Sigma = F_1 + F_2 + \dots + F_k + \dots + F_n$. Поэтому формула для определения абсциссы центра параллельных сил принимает окончательный вид

$$x_C = \sum F_k x_k / \sum F_k.$$

Определив последовательно момент равнодействующей и моменты всех составляющих сил относительно оси x , найдем, что $F_\Sigma y_C = \sum F_k y_k$, откуда следует формула для определения ординаты центра параллельных сил

$$y_C = \sum F_k y_k / \sum F_k.$$

Аналогичную формулу для третьей координаты (аппликаты) центра параллельных сил

$$z_C = \sum F_k z_k / \sum F_k$$

получим, если повернем все силы на 90° , например, так, чтобы они расположились параллельно оси y , и определим моменты сил относительно оси x .

Следовательно, формулы координат центра параллельных сил имеют вид:

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{\sum F_k}; \quad y_c = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k}; \quad z_c = \frac{\sum F_k z_k}{\sum F_k}, \quad (1.60)$$

где F_k — модули параллельных сил; x_k, y_k, z_k — координаты точек их приложения.

§ 1.22. Центр тяжести тела

Сила тяжести — одно из проявлений закона всемирного тяготения. Это сила, распределенная по всему объему тела, так как на каждую его материальную частицу действует сила притяжения, направленная к центру Земли. Силы притяжения, приложенные к частицам твердого тела, образуют систему с линиями действия, сходящимися в центре Земли. Но радиус Земли 6380 км, и если взять у поверхности Земли две материальные точки A и B , например, на расстоянии 10 м одну от другой, то линии действия сил тяжести этих точек образуют угол $\alpha = AB/r_z = 10/6\,380\,000 = 1,57 \cdot 10^{-7}$ рад. Выразив этот угол в секундах, получим $\alpha \approx 0,3''$. Следовательно, углы между линиями действия сил тяжести двух соседних точек тела настолько малы, что систему сил тяжести G_k (рис. 1.84, a), приложенных к телу, размеры которого достигают даже нескольких сотен метров, практически безошибочно можно считать параллельной.

Центр параллельных сил тяжести G_k всех частиц тела называется *центром тяжести* тела. Через центр тяжести C проходит линия действия силы G — равнодействующей сил тяжести ($G = \sum G_k$) при любом

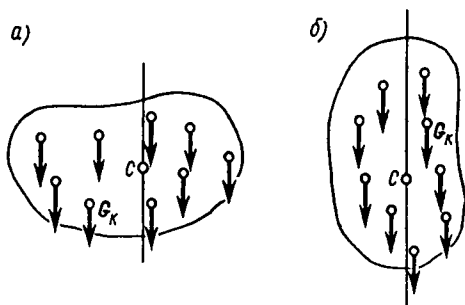


Рис. 1.84

положении тела относительно поверхности Земли (рис. 1.84, а, б).

Если в формулах (1.60) модули сил F_k заменим модулями сил тяжести G_k , то получим формулы координат центра тяжести тела:

$$x_c = \frac{\sum G_k x_k}{\sum G_k}; \quad y_c = \frac{\sum G_k y_k}{\sum G_k}; \quad z_c = \frac{\sum G_k z_k}{\sum G_k}. \quad (1.61)$$

Формулы (1.61) используют лишь в тех случаях, когда требуется определить положение центра тяжести неоднородного тела или неизменяемой системы тел из различных материалов. Обычно определяют положения центров тяжести однородных тел и тогда из формул (1.61) следуют три их разновидности.

1. Если тело имеет вид пространственной решетки, составленной из однородных тонких прутков, площади поперечных сечений которых постоянны, то сила тяжести любого прямолинейного или криволинейного участка $G_k = l_k q$, где q — постоянная для всей решетки сила тяжести единицы длины участка (интенсивность силы тяжести по длине участка). После подстановки в формулы (1.61) вместо G_k его значения $l_k q$ постоянный множитель q в каждом слагаемом числителя и знаменателя вынесем за знак суммы (за скобки) и сократим. В результате получим формулы координат центров тяжести тел в виде решетки (каркаса):

$$x_c = \frac{\sum l_k x_k}{\sum l_k}; \quad y_c = \frac{\sum l_k y_k}{\sum l_k}; \quad z_c = \frac{\sum l_k z_k}{\sum l_k}. \quad (1.62)$$

где x_k, y_k, z_k — координаты центров тяжести отдельных участков решетки длиной l_k .

2. Если тело составлено из тонких однородных пластин одинаковой толщины, то сила тяжести каждого участка $G_k = A_k p$, где p — интенсивность силы тяжести по всей площади. Подставив в формулу (1.61) вместо G_k его значение $A_k p$, получим формулы координат центра тяжести тела, составленного из площадей:

$$x_c = \frac{\sum A_k x_k}{\sum A_k}; \quad y_c = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k}; \quad z_c = \frac{\sum A_k z_k}{\sum A_k}, \quad (1.63)$$

где x_k, y_k, z_k — центры тяжести отдельных участков тела площадью A_k .

3. Аналогичные формулы получим и для однородных тел, составленных из объемных частей, если в формулах (1.61) заменим $G_k = V_k d$, где V_k — объемы участков тела, силы тяжести которых G_k ; d — постоянная для всего тела сила тяжести единицы объема (интенсивность силы тяжести по объему тела или, иначе, объемная сила тяжести):

$$x_c = \frac{\sum V_k x_k}{\sum V_k}; \quad y_c = \frac{\sum V_k y_k}{\sum V_k}; \quad z_c = \frac{\sum V_k z_k}{\sum V_k}. \quad (1.64)$$

Здесь x_k, y_k, z_k — координаты центров тяжести участков тела с объемами V_k .

Для плоских фигур из трех формул (1.62) или (1.63) используют две. Для плоской фигуры, составленной из линий, прутков,

$$x_c = \sum l_k x_k / \sum l_k; \quad y_c = \sum l_k y_k / \sum l_k.$$

Для плоской фигуры, составленной из площадей,

$$x_c = \sum A_k x_k / \sum A_k; \quad y_c = \sum A_k y_k / \sum A_k.$$

При решении задач механики используют чаще последние формулы.

Алгебраические суммы произведений площадей частей плоской фигуры на расстояние их центров тяжести до соответствующей оси называют статическими моментами площадей относительно осей. Следовательно, $\sum A_k x_k$ — статический момент площади относительно оси y ; $\sum A_k y_k$ — статический момент площади относительно оси x .

Обозначив статические моменты соответственно S_y, S_x и приняв во внимание, что $\sum A_k = A$ — площади всей плоской фигуры, последние две формулы примут вид

$$x_c = S_y / A; \quad y_c = S_x / A. \quad (1.65)$$

Отсюда

$$S_x = A y_c; \quad S_y = A x_c. \quad (1.66)$$

т. е. статический момент площади относительно оси абсцисс равен произведению площади фигуры на ординату ее центра тяжести, а статический момент относительно оси ординат — произведению площади фигуры на абсциссу ее центра тяжести.

Статический момент плоской фигуры выражается в м^3 , см^3 или в мм^3 .

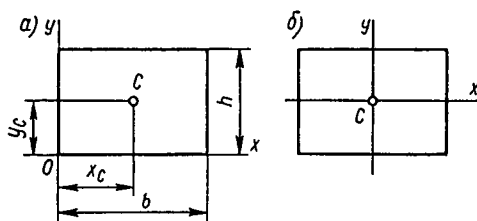


Рис. 1.85

Пример 1.16. Определить статические моменты площади прямоугольника со сторонами $b=20$ см и $h=14$ см относительно осей x и y (рис. 1.85, а).

Решение. 1. Площадь прямоугольника $A=bh$, а координаты центра тяжести C $x_c=b/2=10$ см и $y_c=h/2=7$ см.

2. По формулам (1.66) находим:

$$S_x = bh y_c = 20 \cdot 14 \cdot 7 = 1960 \text{ см}^3; \quad S_y = bh x_c = 20 \cdot 14 \cdot 10 = 2800 \text{ см}^3.$$

Из равенства (1.66) следует важное свойство статического момента: *статический момент плоской фигуры относительно центральной оси* равен нулю.*

Действительно, если в примере 1.16 начало осей координат поместить в точке C (рис. 1.85, б), то при любом положении осей x и y каждая из них будет центральной и в этом случае $x_c=0$, $y_c=0$. Значит, $S_y=0$, $S_x=0$.

В случае произвольной плоской фигуры (рис. 1.86) ее площадь находят интегрированием:

$$A = \int_A dA. \quad (1.67)$$

Интегрированием определяют и статические моменты таких плоских фигур:

$$S_y = \int_A x dA; \quad S_x = \int_A y dA. \quad (1.68)$$

Здесь dA — элементарные площадки плоской фигуры (дифференциал площади); x и y — расстояния от элементарных площадок до осей, знак A у интегралов означает, что интегрирование производится по всей площади.

Исходя из выражений (1.67) и (1.68), формулы координат центра тяжести произвольной плоской фигуры в интегральной форме примут вид

* Оси, проходящей через центр тяжести плоской фигуры.

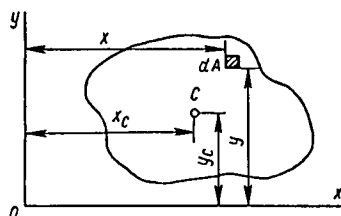


Рис. 1.86

$$x_c = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A}, \quad (1.69)$$

полностью соответствующий формулам (1.65).

§ 1.23. Определение координат центра тяжести плоских и пространственных фигур

Определение положения центра тяжести симметричных фигур и тел значительно облегчается. Если плоская фигура имеет ось симметрии (рис. 1.87), то центр тяжести фигуры обязательно лежит на оси симметрии, т. е. у симметричных плоских фигур центральная ось координат совпадает с осью симметрии. Если же плоская фигура имеет центр симметрии (см. рис. 1.85), то центр тяжести лежит на пересечении осей симметрии.

Если пространственная фигура (тело) имеет плоскость симметрии (рис. 1.88, а), то координата по оси, перпендикулярной плоскости симметрии, равна нулю (центр тяжести в этой плоскости) и для определения положения центра тяжести необходимо определить лишь две координаты (y_c и z_c). Если же тело имеет две плоскости симметрии (рис. 1.88, б), то для определения положения центра тяжести достаточно найти одну координату (ординату z_c). При наличии у тела центра симметрии (правильная призма, цилиндр, шар и т. п.) его центр тяжести определяется положением центра симметрии.

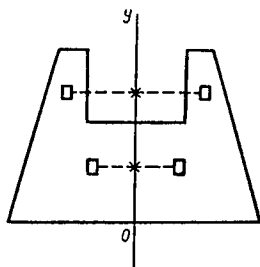


Рис. 1.87

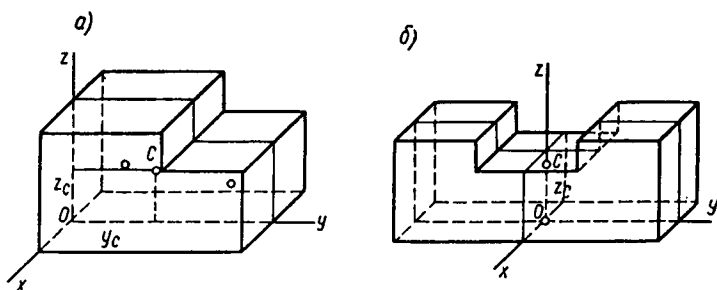


Рис. 1.88

Для успешного решения задач, в которых требуется определять положение центра тяжести тел, полезно знать формулы координат центра тяжести некоторых линий, плоских фигур и тел.

Центр тяжести дуги окружности (рис. 1.89). За начало координат примем точку O — центр дуги AB , ось x совместим с осью симметрии дуги. Дугу разобьем на n элементарных отрезков Δl_k (индекс k принимает значения от 1 до n), координаты центра тяжести каждого такого отрезка x_k и y_k . Абсцисса центра тяжести дуги по первой из формул (1.62)

$$x_c = \sum \Delta l_k x_k / l,$$

где длина дуги $l = \sum \Delta l_k$. Из концов каждого элементарного отрезка Δl_k , приняв его за прямолинейную гипотенузу, проведем параллельные осям катеты Δx_k и Δy_k . Радиус r , проведенный в середину каждого элементарного отрезка дуги, составляет с осью абсцисс угол α_k . Из рис. 1.89 следует, что

$$\cos \alpha_k = x_k / r = \Delta y_k / \Delta l_k,$$

отсюда

$$\Delta l_k x_k = r \Delta y_k.$$

Просуммировав это равенство по всей длине дуги, получим

$$\sum \Delta l_k x_k = r \sum \Delta y_k = rh,$$

где $\sum \Delta y_k = h$ — длина хорды AB .

Следовательно, абсцисса центра тяжести дуги

$$x_c = rh / l. \quad (1.70)$$

Но $h/2 = r \sin \alpha$ или $h = 2r \sin \alpha$, а $l = 2\alpha r$, поэтому

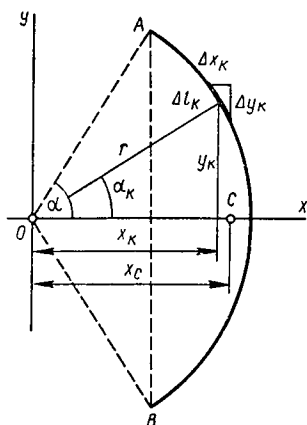


Рис. 1.89

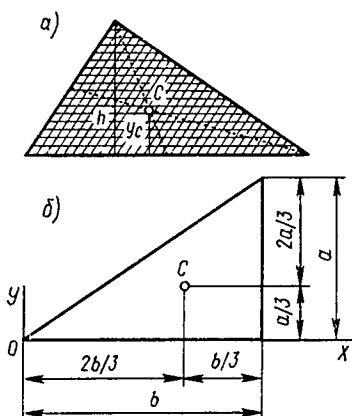


Рис. 1.90

формуле (1.70) можно придать такой вид:

$$x_C = r \sin \alpha / \alpha. \quad (1.70')$$

В частном случае для полуокружности $h = 2r$, $l = \pi r$ или $\alpha = \pi/2$, $\sin \alpha = 1$ и из формулы (1.70) получаем

$$x_C = 2r / \pi = d / \pi, \quad (1.71)$$

где $d = 2r$ — диаметр окружности.

Центр тяжести треугольника (рис. 1.90, а). Чтобы убедиться, что центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, разобьем треугольник на узкие полоски, параллельные одной из сторон. Центр тяжести каждой полоски лежит на ее середине и при переходе от одной полоски к другой их центры тяжести образуют медианы треугольника, на которой и находится центр тяжести всего треугольника. Разбив треугольник на полоски, параллельные второй стороне, получим вторую медиану, и точка пересечения ее с первой определит положение центра тяжести C треугольника. Зная, что длина части медианы от точки их пересечения до стороны составляет $1/3$ всей медианы, легко доказать, что кратчайшее расстояние от центра тяжести треугольника до стороны равно трети соответствующей высоты (например, на рис. 1.90, а $y_C = h/3$). Если треугольник прямоугольный (рис. 1.90, б), то центр тяжести C расположен от каждого катета на расстоянии, равном $1/3$ длины другого.

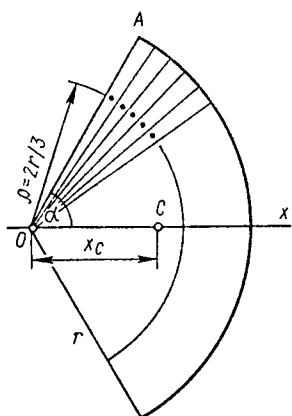


Рис. 1.91

Центр тяжести кругового сектора (рис. 1.91). Разделим сектор на элементарные сектора, которые можно принять за равнобедренные треуголь-

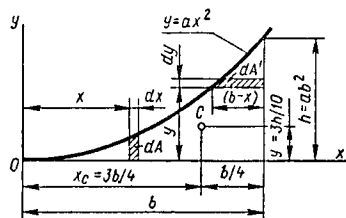


Рис. 1.92

ники высотой, равной радиусу сектора r . Центр тяжести каждого элементарного треугольника (сектора) лежит на его высоте на расстоянии $\rho = (2/3)r$ от вершины O , а все вместе они образуют дугу радиуса ρ . Подставив в формулу (1.70') вместо r значение ρ , получим абсциссу центра тяжести кругового сектора

$$x_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.72)$$

В частном случае для полукруга $\alpha = \pi/2$, $\sin \alpha = 1$ и формула (1.72) принимает вид

$$x_c = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}. \quad (1.73)$$

Центр тяжести параболического треугольника. Параболическим треугольником называется фигура, ограниченная дугой параболы $y = ax^2$ с вершиной в начале координат, осью абсцисс и ординатой $y = h$ (рис. 1.92). Для определения координат центра тяжести параболического треугольника используем формулы (1.67), (1.68), (1.69).

Разобьем площадь треугольника на полоски бесконечно малой ширины dx и переменной высоты $y = ax^2$. Тогда элементарная площадка $dA = y dx = ax^2 dx$. Подставив значение dA в выражение $A = \int dA$ и проинтегрировав по всей площади, т. е. при

изменении x от 0 до b , получим

$$A = a \int_0^b x^2 dx = \frac{ab^3}{3} = \frac{hb}{3}.$$

Статический момент элементарной площадки dA относительно оси y $xdA = ax^3dx$. Проинтегрировав это выражение по всей площади параболического треугольника (т. е. в пределах изменения x от 0 до b), получим

$$S_y = a \int_0^b x^3 dx = \frac{ab^4}{4} = \frac{hb^2}{4}.$$

Для определения статического момента параболического треугольника относительно оси x разобьем его на полоски бесконечно малой высоты dy и ширины $(b-x)$, тогда элементарная площадка

$$dA' = (b-x) dy = 2ax(b-x) dx,$$

так как $dy = 2ax dx$. Следовательно, статический момент элементарной площадки относительно оси x $y dA' = 2a^2 x^3 (b-x) dx$.

Проинтегрировав это выражение по всей площади, получим

$$\begin{aligned} S_x &= 2a^2 \int_0^b x^3 (b-x) dx = 2a^2 \left(\frac{b^5}{4} - \frac{b^5}{5} \right) = \\ &= \frac{a^2 b^5}{10} = \frac{h^2 b}{10}. \end{aligned}$$

Из формул (1.69) получаем координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{hb^2}{4} : \frac{hb}{3} = \frac{3}{4}b;$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{h^2 b}{10} : \frac{hb}{3} = \frac{3}{10}h.$$

Центр тяжести пирамиды (рис. 1.93, а) или конуса (рис. 1.93, б) лежит на отрезке, соединяющем вершину

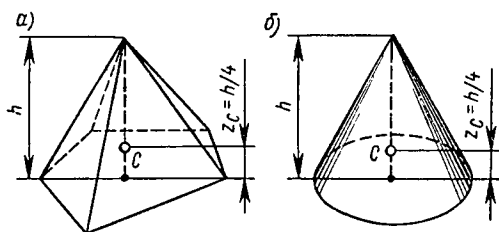


Рис. 1.93

пирамиды (конуса) с центром тяжести основания, на расстоянии $1/4$ высоты пирамиды (конуса)*.

Пример 1.17. Определить положение центра тяжести тонкой однородной пластины, форма и размеры которой показаны на рис. 1.94.

Решение. 1. Пластина имеет осевую симметрию, поэтому с осью симметрии совместим ось y , а ось x совместим с основанием пластины.

2. Представим, что пластина составлена из двух прямоугольников: 1—со сторонами 200×300 мм и 2—со сторонами $(300 - 2 \cdot 75) \times (200 - 80)$ мм $= 150 \times 120$ мм. Но так как второй прямоугольник вырезан из первого, его площадь считаем отрицательной**. Центры тяжести C_1 и C_2 прямоугольников 1 и 2 лежат на оси y и их положение определяется пересечением диагоналей прямоугольников.

3. Определим и запишем площади и координаты центров тяжести прямоугольников 1 и 2:

$$A_1 = 200 \cdot 300 = 6 \cdot 10^4 \text{ мм}^2; \quad C_1(0; 100);$$

$$A_2 = -150 \cdot 120 = -1,8 \cdot 10^4 \text{ мм}^2; \quad C_2(0; 140).$$

4. Согласно формулам (1.63) имеем: $x_c = 0$ и

$$y_c = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 100 - 1,8 \cdot 10^4 \cdot 140}{6 \cdot 10^4 - 1,8 \cdot 10^4} = 82,8 \text{ мм}.$$

Следовательно, координаты центра тяжести пластины $C(0; 82,8)$.

Если бы на рис. 1.94 был изображен согнутый из тонкой проволоки замкнутый контур, а не пластина, то ордината центра тяжести получила бы значение $y_c = 97,9$ мм. Примените формулы (1.62) и убедитесь в этом.

Кроме описанного выше координатного метода определения положения центра тяжести тел применяют экспериментальные способы. Рассмотрим два из них.

* Справедливость этого утверждения докажете самостоятельно.

** Этот способ разбиения фигуры на составные части называется способом *отрицательных площадей*. Не прибегая к нему, фигуру можно было разбить на три прямоугольника с положительными площадями.

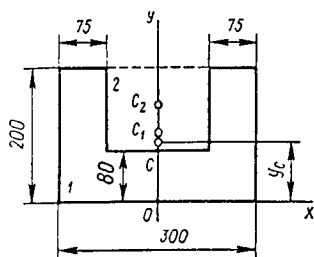


Рис. 1.94

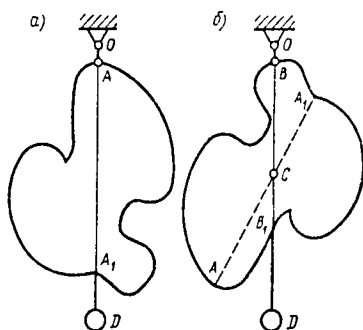


Рис. 1.95

Способ подвешивания основан на второй аксиоме статики.

Если тело в виде пластинки любой формы (рис. 1.95, а) подвесить на нити, например, в точке A , то при равновесии центр тяжести тела обязательно займет положение на вертикали, проходящей через точку подвеса A , так как только при таком положении центра тяжести сила тяжести и реакция нити AO уравновешивают друг друга. С помощью отвеса OD отметим на теле линию AA_1 , на которой расположен искомый центр тяжести. Подвесив затем тело на нити в другой точке, например B (рис. 1.95, б), получим линию BB_1 , которая пересечением с линией AA_1 фиксирует положение центра тяжести C . Для проверки можно подвесить тело в какой-либо третьей точке и в этом случае отвесная линия, проведенная из точки подвеса, пройдет через точку C — центр тяжести тела.

Способ взвешивания применяют для определения положения центра тяжести тел сложной формы, а также при необходимости экспериментальной проверки расчетных данных. Например, положение центра тяжести самолетов взвешиванием находят следующим образом. Главные колеса, вблизи которых обычно и расположен центр тяжести самолета, а также переднее колесо (или заднее, если центр тяжести расположен за главными колесами) устанавливают на весы 1, 2 и 3* таким образом, чтобы самолет находился строго в полетном положении

* Это либо обычные рычажные (сотенные или тысячные) весы, либо электротензометрические.

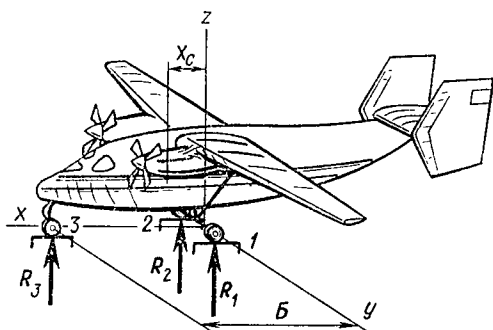


Рис. 1.96

(рис. 1.96). Сумма показаний R_1 , R_2 и R_3 равна силе тяжести самолета: $G = R_1 + R_2 + R_3$. Составив уравнение моментов относительно оси y , совпадающей с осью главных колес, получим

$$R_3 B - G x_c = 0,$$

где B — база самолета, т. е. расстояние от главных колес до переднего (или заднего) колеса. Отсюда абсцисса центра тяжести самолета $x_c = R_3 B / G$.

§ 1.24. Устойчивость равновесия

Понятие механики «устойчивость равновесия» имеет большое практическое значение и используется в строительстве при возведении промышленных и жилых зданий, машиностроении, кораблестроении, авиастроении и т. д.

Как известно из физики, имеющее точку опоры тело, на которое действует только сила тяжести, находится в равновесии, если сила тяжести и реакция опоры действуют вдоль одной прямой (вторая аксиома статики). Но при этом наблюдаются три разновидности равновесия:

устойчивое, при выведении из которого тело возвращается в прежнее положение. Примером устойчивого равновесия может служить тяжелый шарик, лежащий внутри чашки (рис. 1.97, а), или тяжелый шарик, подвешенный на нити (рис. 1.97, б). В обоих случаях при выведении шарика из положения равновесия возникает сила $F_{\Sigma} = G + R$, возвращающая шарик в первоначальное положение;

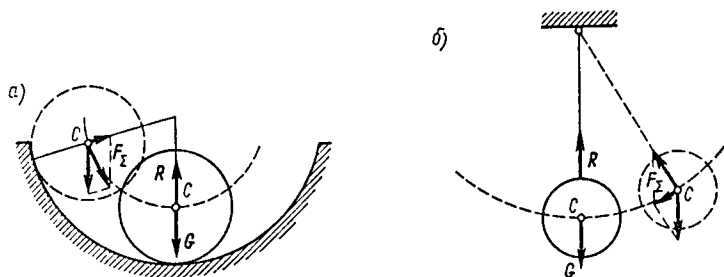


Рис. 1.97

неустойчивое, при выведении из которого тело не возвращается в прежнее положение, а удаляется от него еще дальше. Шарик на самой верхней точке выпуклой поверхности (рис. 1.98, а) или конус, поставленный на вершину (рис. 1.98, б), находятся в неустойчивом равновесии, так как достаточно самого ничтожного смещения из этого положения, чтобы шарик под действием силы $F_{\Sigma} = G + R$ удалился от верхней точки еще дальше, а конус опрокинулся под действием образовавшейся пары (G , R);

безразличное, или *нейтральное* (рис. 1.99), если при любом смещении тела его равновесие не нарушается.

Условие устойчивости равновесия тела, находящегося под действием силы тяжести, можно получить из сопоставления трех видов равновесия. Условие устойчивости состоит в том, что при выведении из равновесия центр тяжести тела повышается, т. е. *если центр тяжести тела занимает самое низкое положение по сравнению со всеми возможными соседними положениями, то равновесие тела устойчивое.*

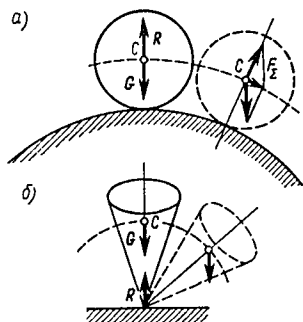


Рис. 1.98

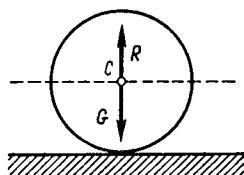


Рис. 1.99

На искусном использовании неустойчивого равновесия основано исполнение многих цирковых номеров. В основе же расчетов и построения механических конструкций лежит принцип соблюдения устойчивого равновесия для всех направлений возможного отклонения. В связи с этим рассмотрим равновесие тела не с одной, а с несколькими точками опоры, лежащими не на одной прямой, т. е. тела, имеющего опорную плоскость (поверхность).

В зависимости от формы, размеров опорной плоскости, положения центра тяжести относительно этой плоскости и действующих активных сил (их числового значения и направления) устойчивость тела может быть большей или меньшей и, следовательно, поддается измерению и количественному сравнению.

На рис. 1.100, а изображены три тела: у тел 1 и 2 центры тяжести расположены на одной высоте от опорной плоскости, но у тела 2 опорная плоскость шире, чем у тела 1; опорная плоскость у тела 3 по форме и размерам такая же, как у тела 1, но центр тяжести расположен ниже — ближе к опорной плоскости. Все три тела находятся в устойчивом равновесии, так как если любое из них немного наклонить

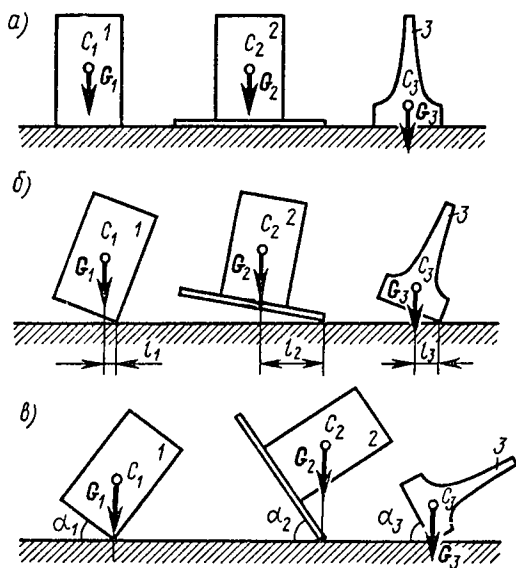


Рис. 1.100

(рис. 1.100, б), то их центры тяжести C поднимаются, а после прекращения действия поворачивающих сил каждое тело возвращается в первоначальное положение под действием момента силы тяжести G относительно оси поворота.

Момент силы тяжести способен возвращать тело в прежнее положение равновесия до тех пор, пока вертикаль, проведенная из центра тяжести тела, проходит внутри площади опоры. Для того чтобы его опрокинуть, необходимо: тело 1 повернуть на угол не менее чем α_1 , тело 2 — на угол не менее чем α_2 , тело 3 — на угол не менее чем α_3 (рис. 1.100, в), называемые *углами устойчивости этих тел*.

Способность тел возвращаться в исходное положение равновесия после прекращения действия сил, нарушающих это равновесие, называется *динамической устойчивостью*.

Из примера на рис. 1.100 видно, что динамическая устойчивость тела увеличивается по мере увеличения размеров его опорной плоскости и понижения центра тяжести. Проблема сохранения динамической устойчивости обычно возникает при проектировании, постройке и эксплуатации морских и речных судов, перевозке грузов по железной дороге или на автомашинах. Эта же проблема стоит и перед проектировщиками самолетов, причем им приходится преодолевать противоречие между динамической устойчивостью и маневренностью. Высокая динамическая устойчивость самолетов достигается путем некоторого снижения их маневренности. То, что приемлемо для пассажирских или транспортных самолетов, оказывается отрицательным, например, для истребителей.

При постройке зданий, установке и монтаже различного промышленного оборудования возникает проблема сохранения статической устойчивости. *Статической устойчивостью называется способность тела сопротивляться всякому сколь угодно малому нарушению равновесия.*

Представим, что на некоторый массив $ABDE$ (рис. 1.101), сила тяжести которого G приложена в точке C , действует сила F , стремящаяся опрокинуть массив, т.е. повернуть его около оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка. Как видим, на массив относительно точки A дей-

ствуют опрокидывающий момент силы F ($M_{оп} = -Fb$) и момент устойчивости силы G ($M_{yc} = Gl$).

Массив $ABDE$ сохраняет статическую устойчивость до тех пор, пока

$$|M_{yc}| > |M_{оп}|. \quad (1.74)$$

Отношение абсолютных значений момента устойчивости и опрокидывающего момента

$$\frac{|M_{yc}|}{|M_{оп}|} = k \quad (1.75)$$

называется *коэффициентом устойчивости*.

По коэффициенту устойчивости $k > 1$ можно судить о степени устойчивости тел.

Условие статической устойчивости, выражающееся неравенством (1.74), можно сформулировать иначе. Если $|M_{yc}| > |M_{оп}|$, то алгебраическая сумма этих моментов относительно точки A , равная моменту равнодействующей $F_{\Sigma} = F + G$ (на рис. 1.101 показана штриховым вектором), имеет тот же знак, что и у момента устойчивости. Следовательно, неравенство (1.74) выполняется до тех пор, пока линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к телу, проходит внутри его опорной плоскости.

Пример 1.18. Железнодорожный кран опирается на рельсы, расстояние между которыми $AB = 1,5$ м (рис. 1.102). Сила тяжести тележки крана $G_r = 30$ кН, центр тяжести тележки находится в точке C , лежащей на линии KL пересечения плоскости симметрии тележки с плоскостью рисунка. Сила тяжести лебедки крана $G_n = 10$ кН приложена в точке D . Сила тяжести противовеса $G_n = 20$ кН приложена в точке E . Сила тяжести стрелы $G_c = 5$ кН приложена в точке H . Вылет крана относительно линии KL равен 2 м. Определить коэффициент устойчивости крана в ненагруженном состоянии и какой груз F можно поднять этим краном при

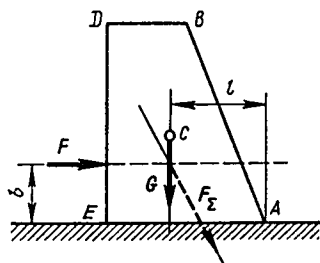


Рис. 1.101

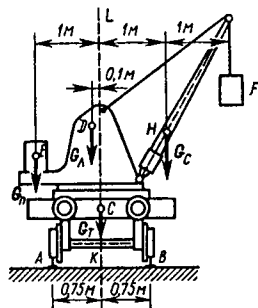


Рис. 1.102

условии, что коэффициент устойчивости должен быть не менее двух.

Решение 1. В ненагруженном состоянии у крана возникает опасность опрокидывания при повороте вокруг рельса A . Следовательно, относительно точки A момент устойчивости

$$\begin{aligned} |M_{ycA}| &= |M_A(G_n)| + |M_A(G_r)| + |M_A(G_c)| = \\ &= 10 \cdot 0,65 + 30 \cdot 0,75 + 5 \cdot 1,75 \text{ кН} \cdot \text{м} = 37,75 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

2. Опрокидывающий момент относительно точки A создается силой тяжести противовеса, т. е.

$$|M_{опA}| = |M_A(G_n)| = 20 \cdot 0,25 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Отсюда коэффициент устойчивости крана в ненагруженном состоянии

$$k_A = \frac{|M_{ycA}|}{|M_{опA}|} = \frac{37,75}{5} = 7,54.$$

4. При нагрузке стрелы крана грузом F возникает опасность опрокидывания крана с поворотом около рельса B . Следовательно, относительно точки B момент устойчивости

$$\begin{aligned} |M_{ycB}| &= |M_B(G_n)| + |M_B(G_r)| + |M_B(G_c)| = \\ &= 20 \cdot 1,75 + 10 \cdot 0,85 + 30 \cdot 0,75 \text{ кН} \cdot \text{м} = 66,0 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

5. Опрокидывающий момент относительно рельса B

$$\begin{aligned} |M_{опB}| &= |M_B(G_c)| + |M_B(F)| = \\ &= 5 \cdot 0,25 + F \cdot 1,25 = 1,25 + 1,25F. \end{aligned}$$

6. По условию задачи эксплуатация крана разрешается при коэффициенте устойчивости $k \geq 2$, т. е.

$$\frac{|M_{ycB}|}{|M_{опB}|} = \frac{66}{(1,25 + 1,25F)} \geq 2.$$

Отсюда

$$F < \frac{(33 - 1,25)}{1,25} = 25,4 \text{ кН}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое статический момент площади? В каких единицах измеряется и какие значения может принимать?

2. Чему равен статический момент прямоугольника со сторонами 20 и 40 см относительно осей, совпадающих с этими сторонами?

3. Куда и на сколько переместится центр тяжести прямого однородного стержня, если согнуть его посередине под прямым углом?

4. Четырехгранные призма и пирамида имеют равные квадратные основания и равные высоты. Одинаковы ли у них динамическая и статическая устойчивость?

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА 7. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1.25. Основные понятия кинематики

Раздел механики, занимающийся изучением движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил, называется кинематикой. Изучая и классифицируя движение тел, кинематика может ответить на вопросы—как и куда движется тело и где оно может оказаться в определенный момент времени. Как известно, в природе нет абсолютного покоя: *движение—основная форма существования всего материального мира, покой и равновесие—частные случаи движения.* Вокруг себя мы постоянно наблюдаем движущиеся тела: мимо нас проходят люди, проезжают автомобили, над нами пролетают самолеты, птицы... Сами мы живем на Земле, которая, вращаясь около собственной оси, движется вокруг Солнца и т. д. Но движение одного и того же тела различными людьми часто воспринимается не одинаково, а в зависимости от места наблюдения. Если, например, один из них наблюдает за движением автомобиля стоя у дороги, а второй видит его из окна движущегося автобуса, то их выводы о движении автомобиля могут не совпадать. Чтобы результаты наблюдений за движением тел были сравнимыми, необходимо договориться о месте, откуда ведется наблюдение, т. е. договориться о *системе отсчета.*

Для нас, обитателей Земли, естественной системой отсчета является Земля. Мы рассматриваем движение тел относительно Земли, считая ее условно неподвижной, или, что одно и то же, относительно тел (предметов), неподвижно связанных с Землей.

Всякое движение, и механическое в том числе, происходит в пространстве и во времени, т. е. сколько угодно незначительное перемещение тела связано с

изменением его положения относительно других тел и происходит не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени, хотя бы и очень малого.

Все тела состоят из материальных точек, и чтобы получить правильное представление о движении тел, начинать изучение нужно с движения точки. Перемещение точки в пространстве выражается в метрах, а также в дольных (см, мм) или кратных (км) единицах длины, время — в секундах. В практике или жизненных ситуациях время часто выражают в минутах или часах. Отсчет времени при рассмотрении того или иного движения точки ведут от определенного, заранее обусловленного, начального момента ($t_0 = 0$).

Геометрическое место положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета называется **траекторией**. По виду траектории движение точки делится на *прямолинейное* и *криволинейное*. Траектория точки может быть определена и задана заранее. Так, например, траектории искусственных спутников Земли и межпланетных станций вычисляют заранее, или, если принять движущиеся по городу автобусы за материальные точки, то их траектории (маршруты) также известны. В подобных случаях положение точки в каждый данный момент времени t определяется расстоянием (дуговой координатой) s , т. е. *длиной участка траектории, отсчитанной от некоторой ее неподвижной точки, принятой за начало отсчета*. Отсчет расстояний от начала траектории можно вести в обе стороны, поэтому отсчет в одну какую-либо сторону условно принимают за положительный, а в противоположную — за отрицательный, т. е. расстояние s — величина алгебраическая, она может быть положительной ($s > 0$) или отрицательной ($s < 0$).

При движении точка за определенный промежуток времени проходит некоторый **путь** L , который измеряется вдоль траектории в направлении движения. При движении точки из любого начального положения путь может только возрастать; следовательно, путь — величина существенно положительная.

В частном случае, если точка (рис. 1.103, а), двигаясь из начала отсчета O в одном направлении, через некоторое время оказалась в положении A , то расстояние s_1 и пройденный точкой путь $L = \widetilde{OA}$

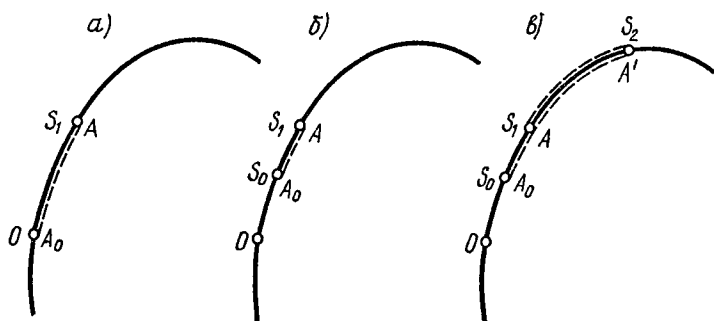


Рис. 1.103

численно совпадают: $s_1 = L$. Если точка стала двигаться не из начала отсчета O , а из положения, находящегося на начальном расстоянии s_0 (рис. 1.103, б), и через некоторое время оказалась в положении A на расстоянии s_1 от начала отсчета, то пройденный точкой путь $L = \overset{\sim}{A_0A} = s_1 - s_0$, т. е. раз-

ности между конечным и начальным расстояниями. Но это утверждение справедливо лишь в том случае, когда точка движется по траектории в одну сторону. Если же точка, начав движение из положения A_0 на расстоянии s_0 от точки O , за некоторое время прошла до положения A' , находящегося на расстоянии s_2 , а затем вернулась в положение A (рис. 1.103, в) и оказалась в конечном счете на расстоянии s_1 от начала O , то пройденный путь $L = A_0A' + A'A = (s_2 - s_0) + (s_2 - s_1) = 2s_2 - s_1 - s_0$. На рис. 1.103 пройденные точкой пути отмечены штриховыми линиями рядом с траекторией.

Векторная величина, характеризующая в каждый данный момент времени направление и быстроту движения точки, называется скоростью. В обыденной жизни понятие «скорость» воспринимается как скалярная величина, и поэтому термины «скорость» и «быстрота» считаются синонимами. Как кинематическое понятие скорость — вектор, т. е. и быстрота, и направление. Быстроту движения точки выражает числовое значение (модуль) вектора. За единицу скорости обычно принимается 1 м/с, но часто скорость выражают в км/ч ($1 \text{ км/ч} = 10^3 \text{ м/3600 с} \approx 0,278 \text{ м/с}$) или в м/мин ($1 \text{ м/мин} = 1 \text{ м/60 с} \approx 0,0167 \text{ м/с}$).

Скорость точки в любой момент ее движения направлена по касательной к траектории. Это известно из физики утверждение вытекает из следующих рассуждений. Допустим, что точка, двигаясь по криволинейной траектории, в заданный момент времени занимает положение A , а через некоторый промежуток времени Δt оказалась в положении

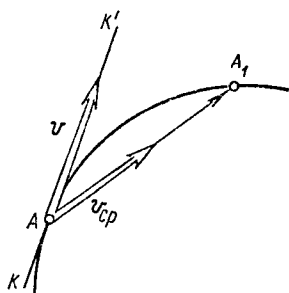


Рис. 1.104

A_1 (рис. 1.104). Тогда вектор $\overline{AA_1}$ изображает перемещение точки из положения A в положение A_1 . Разделив вектор перемещения точки на Δt , получим вектор средней скорости

$$\mathbf{v}_{cp} = \overline{AA_1} / \Delta t, \quad (1.76)$$

направленный вдоль вектора перемещения в ту же сторону. Отметим, что векторное равенство (1.76) характеризует лишь положение \mathbf{v}_{cp} , а модуль средней скорости за время Δt

$$v_{cp} = \widetilde{AA_1} / \Delta t, \quad (1.77)$$

где $\widetilde{AA_1} = L$ — путь, пройденный точкой за время Δt .

Таким образом, *числовое значение (модуль) средней скорости равно частному от деления пройденного пути на время, в течение которого этот путь пройден.*

При постепенном уменьшении промежутка времени Δt второе положение точки A_1 приближается к A и по мере сближения A_1 с A вектор \mathbf{v}_{cp} , изменяясь, приближается как к пределу к вектору \mathbf{v} (рис. 1.104), направленному вдоль касательной KK' к траектории в точке A . Следовательно, скорость точки в данный момент

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{AA_1} / \Delta t. \quad (1.78)$$

При движении точки по криволинейной траектории непрерывно изменяется как направление, так и числовое значение (модуль) скорости.

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения направления и числового значения скорости, называется ускорением. Обратим внимание на некоторые особенности изменения вектора ускорения. Допустим, что точка A движется по криволинейной траектории, и для простоты представим, что на некотором участке радиус ρ кривизны траектории остается неизменным (точка движется по дуге окружности). Пусть в момент времени t_1 точка занимает положение A_1 и ее скорость v_1 (рис. 1.105, а), а через $\Delta t = t_2 - t_1$ в положении A_2 скорость точки v_2 . За это время направление скорости изменилось на угол φ (угол смежности), а модуль скорости изменился на $v_2 - v_1$. Вычитанием вектора v_2 из v_1 определим геометрическое (векторное) изменение скорости $\Delta v = v_2 - v_1$ за время Δt . Разделив вектор изменения скорости Δv на Δt , получим вектор среднего ускорения

$$a_{cp} = \Delta v / \Delta t, \quad (1.79)$$

который характеризует за время Δt как среднюю быстроту изменения направления скорости, так и среднюю быстроту изменения скорости по модулю.

Вектор среднего ускорения направлен параллельно вектору изменения скорости и образует с касательной к траектории некоторый угол α . Легко заметить, что вектор среднего ускорения при прочих равных условиях зависит от кривизны траектории. Увеличив кривизну участка $A_1 A_2$ траектории (рис. 1.105, б), оставив неизменными время Δt передвижения точки из A_1 в A_2 и модули скорости в этих положениях ($v'_1 = v_1$ и $v'_2 = v_2$), увидим, что направление скорости

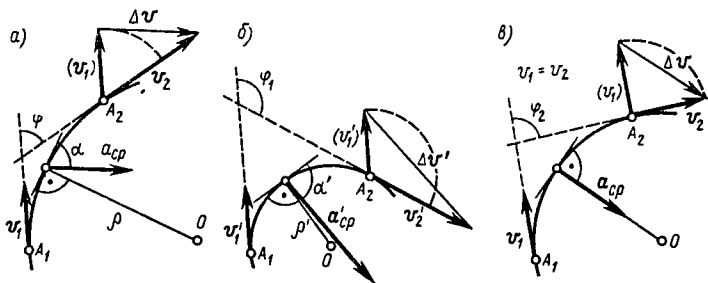


Рис. 1.105

за тот же промежуток времени Δt изменилось на больший угол φ_1 , чем прежде ($\varphi_1 > \varphi$); изменился и вектор $\Delta \mathbf{v}'$, а следовательно, изменился и вектор среднего ускорения $\mathbf{a}'_{\text{ср}} = \Delta \mathbf{v}' / \Delta t$.

При *равномерном* движении по криволинейной траектории точка тоже имеет ускорение (рис. 1.105, в), так как и в этом случае изменяется направление скорости.

За единицу ускорения принимают обычно 1 м/с^2 .

§ 1.26. Способы задания движения точки

Прежде чем начать изучение и классификацию движения точки, необходимо ознакомиться со способами задания ее положения по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени, т. е. со способами задания ее движения. Из применяемых в механике способов задания точки рассмотрим два: *естественный и координатный* *.

Естественный способ задания движения точки. В предыдущем параграфе мы установили, что положение точки на заданной траектории в любой момент времени однозначно определяется расстоянием (дуговой координатой) s . Значит, если кроме траектории, на которой отмечено начало отсчета O , задана зависимость

$$s = f(t) \quad (1.80)$$

между расстоянием s и временем t , то в любой момент времени можно точно определить положение точки на траектории. Уравнение (1.80) называется *законом движения точки по заданной траектории*.

Пусть, например, задана некоторая траектория (рис. 1.106), движение точки по которой определяется уравнением $s = 0,5t^2$ (s — м, t — с), тогда в момент времени $t_0 = 0$ $s_0 = 0$, т. е. точка находится в начале отсчета O ; в момент времени $t_1 = 1$ с точка находится на расстоянии $s_1 = 0,5t_1^2 = 0,5 \cdot 1^2 = 0,5$ м; в момент времени $t_2 = 2$ с точка находится на расстоянии $s_2 = 0,5t_2^2 = 0,5 \cdot 2^2 = 2$ м от начала отсчета O .

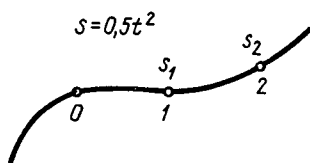


Рис. 1.106

* С третьим способом задания движения точки — векторным — читатель может познакомиться по любому учебнику по теоретической механике для вузов.

Координатный способ задания движения точки. Когда траектория точки заранее не известна, положение точки в пространстве определяется тремя координатами: абсциссой x , ординатой y и аппликатой z по отношению к прямоугольной (декартовой) системе координат $Oxyz$ (рис. 1.107). Если при этом известна или задана система уравнений, выражающих зависимость изменения координат с течением времени t ,

$$x=f_1(t); y=f_2(t); z=f_3(t), \quad (1.81)$$

то, подставляя в эти уравнения значения t , можно определять положение точки в пространстве. Уравнения (1.81) выражают закон движения точки в прямоугольной системе координат.

В частном случае, если точка движется в плоскости, закон движения точки выражается двумя уравнениями:

$$x=f_1(t); y=f_2(t). \quad (1.82)$$

Например, известно, что движение точки в плоской системе координат (рис. 1.108) задано уравнениями $x=2t$ и $y=3t$ (x и y — м, t — с), тогда в момент времени $t_0=0$ $x_0=0$ и $y_0=0$, т. е. точка находится в начале координат; в момент времени $t_1=1$ с координаты точки $x_1=2t_1=2 \cdot 1=2$ см, $y_1=3t_1=3 \cdot 1=3$ см; в момент времени $t_2=2$ с координаты точки $x_2=2t_2=2 \cdot 2=4$ см, $y_2=3t_2=3 \cdot 2=6$ см и т. д.

Зная закон движения точки в прямоугольной системе координат, можно определить уравнение траектории точки. Для этого нужно из уравнений

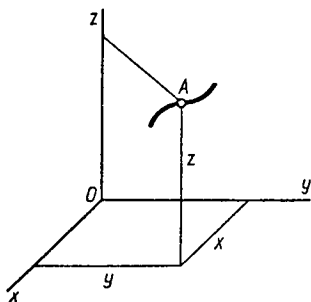


Рис. 1.107

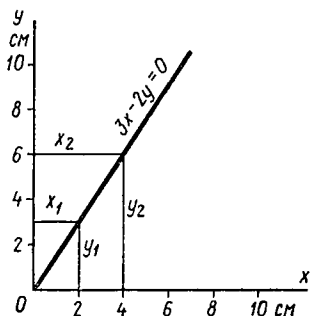


Рис. 1.108

движения исключить время t . Так, исключив время t из уравнений (1.81), получим уравнение траектории

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad (1.83)$$

а после исключения времени t из уравнений (1.82) уравнение траектории примет вид

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (1.84)$$

Например, исключив время t из заданных выше уравнений $x = 2t$ и $y = 3t$, получим уравнение траектории $3x - 2y = 0$. Как видим (рис. 1.108), в этом случае точка движется по прямой, проходящей через начало координат.

§ 1.27. Определение скорости точки при естественном способе задания ее движения

Из § 1.25 известно, что при движении точки по криволинейной траектории ее скорость в каждый данный момент времени направлена по касательной к траектории. Там же установлено, что числовое значение средней скорости за любой промежуток времени Δt равно частному от деления пройденного пути на время Δt [см. равенство (1.77)]. Рассмотрим теперь, как определяется значение скорости в любой момент времени.

Пусть движение точки A по заданной траектории (рис. 1.109) происходит согласно уравнению $s = f(t)$ и требуется определить скорость точки в момент времени t . Подставив значение времени t в уравнение движения, определим в этот момент расстояние точки A от начала отсчета. Продолжая движение, точка в момент времени $t + \Delta t$ займет положение A_1 на расстоянии s_1 от начала отсчета O . Таким образом, за промежуток времени Δt точка прошла путь $L = \Delta s = s_1 - s$. Значение средней скорости на этом пути

$$v_{cp} = \Delta s / \Delta t,$$

но оно отличается от значения скорости в момент времени t .

Если постепенно уменьшать промежуток времени Δt , то уменьшается и пройденный путь Δs , т. е. в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ значение средней скорости прибли-

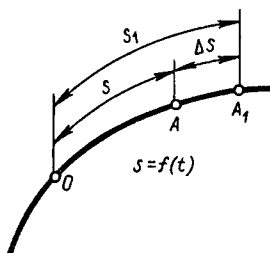


Рис. 1.109

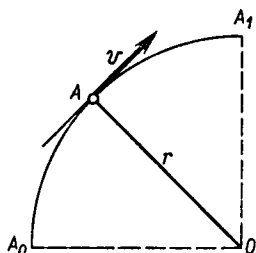


Рис. 1.110

жается к значению скорости в заданный момент t . Значит,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = ds/dt = f'(t), \quad (1.85)$$

т. е. значение скорости точки, движение которой задано естественным способом, в любой момент времени равно первой производной от расстояния (дуговой координаты) по времени.

Направление скорости, как отмечалось выше, известно заранее.

Пример 1.19. По дуге, равной четверти длины окружности радиуса $r = 16$ м (рис. 1.110), из положения A_0 в положение A_1 движется точка согласно уравнению $s = \pi t^2$. Определить скорость точки в момент, когда она проходит середину длины дуги A_0A_1 , и в момент достижения положения A_1 .

Решение. 1. Если длина дуги A_0A_1 равна четверти длины окружности, то середина дуги (точка A) находится от начала отсчета A_0 на расстоянии одной восьмой окружности, т. е.

$$s = \overset{\frown}{A_0A} = \frac{2\pi r}{8} = \frac{2\pi \cdot 16}{8} = 4\pi \text{ м.}$$

2. Из заданного уравнения движения $s = \pi t^2$ находим, что точка после начала движения достигает середины дуги через промежуток времени

$$t = \sqrt{\frac{s}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\pi}} = 2 \text{ с.}$$

3. Продифференцировав уравнение движения, найдем уравнение скорости:

$$v = \frac{ds}{dt} = (\pi t^2)' = 2\pi t.$$

4. Подставив значение $t = 2$ с в уравнение скорости, найдем

$$v = 2\pi t = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12,6 \text{ м/с.}$$

5 Проведем в точке A (середину дуги A_0A_1) касательную к траектории и изобразим вектор скорости \mathbf{v} (рис. 1.110).

Скорость точки в конце траектории (в положении A_1) рекомендуется найти самостоятельно. (Ответ: 17,8 м/с.)

§ 1.28. Определение ускорения точки при естественном способе задания ее движения

При движении точки по криволинейной траектории, как известно, изменяются и направление, и числовое значение (модуль) скорости. Зная закон движения точки по траектории, находим скорость точки A в момент времени t . Изобразим в этот момент скорость точки вектором $\overline{AB} = \mathbf{v}$ (рис. 1.111). В следующий момент времени $t_1 = t + \Delta t$ точка A переместилась в A_1 и ее скорость изобразится вектором \mathbf{v}_1 . Условимся считать, что приращение времени Δt невелико и за этот небольшой промежуток времени точка прошла настолько незначительный путь $\widetilde{AA_1} = \Delta s$, что радиусы кривизны траектории в точках A и A_1 можно считать одинаковыми и равными $OA = OA_1 = \rho$.

Определим изменение вектора скорости за время Δt . Для этого из точки A построим вектор $\overline{AC} = \mathbf{v}_1$ и найдем $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$. Тогда вектор среднего ускорения (на рис. 1.111 он не показан)

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t.$$

При неограниченном уменьшении промежутка времени Δt вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ стремится к вектору ускорения \mathbf{a} в данный момент как к пределу, т. е.

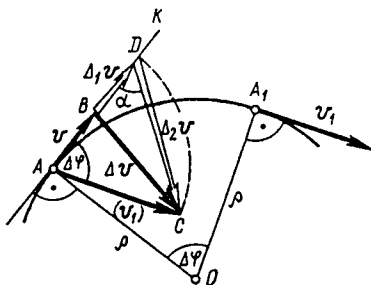


Рис. 1.111

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v} / \Delta t. \quad (\text{a})$$

Представим вектор $\Delta \mathbf{v}$ в виде результирующего вектора геометрической суммы двух векторов $\Delta_1 \mathbf{v}$ и $\Delta_2 \mathbf{v}$:

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta_1 \mathbf{v} + \Delta_2 \mathbf{v}, \quad (\text{б})$$

где модуль вектора $\Delta_1 \mathbf{v}$ равен $\Delta_1 v = v_1 - v$.

На основании уравнения (б) выражение (а) принимает вид

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_1 \mathbf{v} + \Delta_2 \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_1 \mathbf{v}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (\text{в})$$

Следовательно, ускорение точки в любой момент t равно сумме двух векторов. Для слагаемых векторов введем обозначения

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_1 \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{a}_t \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{a}_n$$

и определим их направления, а также числовые значения (модули).

По мере приближения Δt к нулю вектор $\Delta_1 \mathbf{v}$, направленный по касательной AK к траектории, сохраняет это направление. Значит, и вектор \mathbf{a}_t в любой момент времени направлен по касательной. Поэтому вектор \mathbf{a}_t называется касательным или тангенциальным ускорением.

Так как модуль вектора $\Delta_1 \mathbf{v}$ равен $\Delta_1 v = v_1 - v$ — изменению модулей скорости за время Δt , то *модуль касательного ускорения*

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta_1 v / \Delta t = dv/dt = f''(t), \quad (1.86)$$

равный производной от скорости в данный момент по времени или, иначе, второй производной от расстояния по времени, характеризует быстроту изменения значения скорости.

При $\Delta t \rightarrow 0$ направление вектора $\Delta_2 \mathbf{v}$ меняется и в пределе вектор $\Delta_2 \mathbf{v}$ стремится занять перпендикулярное касательной направление. Докажем это.

Из построения на рис. 1.111 следует, что $\triangle CAD$ равнобедренный ($AC = AD$); значит, $\hat{ACD} = \hat{ADC} = \alpha$, а

$\widehat{CAD} = \widehat{AOA}_1 = \Delta\varphi$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из равенства $2\alpha + \Delta\varphi = 180^\circ$ следует

$$\alpha = (180^\circ - \Delta\varphi)/2 = 90^\circ - \Delta\varphi/2.$$

Так как при $\Delta t \rightarrow 0$ имеем $\Delta\varphi \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (90^\circ - \Delta\varphi/2) = 90^\circ.$$

Доказано, что вектор \mathbf{a}_n в любой момент времени перпендикулярен касательной. Поэтому он называется нормальным ускорением.

Определим теперь модуль a_n нормального ускорения. Учитывая, что при малом значении Δt угол $\Delta\varphi$ и \widetilde{AA}_1 невелики, можно принять $\triangle ADC \sim \triangle OAA_1$. Из подобия треугольников

$$DC/\widetilde{AA}_1 = AC/OA_1 \quad \text{или} \quad \Delta_2 v/\Delta s = v_1/\rho.$$

Оба отношения пропорции умножим на Δs и разделим на Δt :

$$\Delta_2 v/\Delta t = \Delta s v_1/\Delta t \rho$$

и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s v_1}{\Delta t \rho} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} v_1 \right).$$

Так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 v}{\Delta t} = a_n; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v,$$

окончательно получаем $a_n = (1/\rho) v v$ или

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (1.87)$$

Значит, модуль нормального ускорения пропорционален второй степени модуля скорости в данный момент, обратно пропорционален радиусу кривизны траекторий в данной точке и характеризует быстроту изменения направления скорости.

Таким образом установлено, что вектор \mathbf{a} — уско-

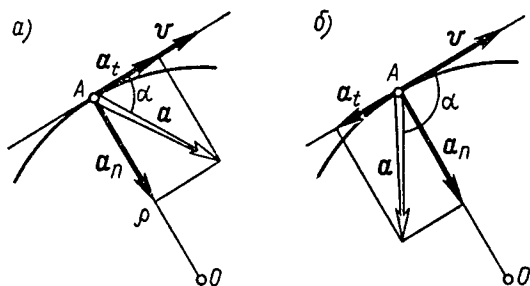


Рис. 1.112

рение точки в данный момент — есть геометрическая сумма касательного a_t и нормального a_n ускорений (рис. 1.112):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n. \quad (1.88)$$

Направление обоих составляющих векторов известно заранее и поэтому, определив модули a_t и a_n по формулам (1.87) и (1.88), легко найти ускорение \mathbf{a} ; модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad (1.89)$$

а направление \mathbf{a} [угол $\alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{v})$] находим с помощью тригонометрических функций по одной из следующих формул:

$$\sin \alpha = a_n/a; \quad \cos \alpha = a_t/a; \quad \operatorname{tg} \alpha = a_n/a_t. \quad (1.90)$$

Можно, конечно, сначала найти направление вектора по третьей из формул (1.90), а затем по любой из двух первых определить a .

Из выражения (1.87) видно, что a_n всегда положительно, так как при любом значении v (положительном или отрицательном) $v^2 > 0$, а радиус ρ не может быть меньше нуля.

В формуле (1.86) производная от скорости по времени — величина алгебраическая и, следовательно, касательное ускорение может быть как положительным, так и отрицательным.

Если векторы \mathbf{v} и \mathbf{a}_t направлены в одну и ту же сторону (рис. 1.112, а), то движение точки называется *ускоренным*. При этом значения v и a_t имеют одинаковые знаки ($v > 0$, $a_t > 0$ или $v < 0$, $a_t < 0$). Если же векторы \mathbf{v} и \mathbf{a}_t направлены в противоположные

стороны (рис. 1.112, б), то движение точки называется *замедленным*. В этом случае знаки v и a_t разные ($v > 0$, $a_t < 0$ или $v < 0$, $a_t > 0$).

Пример 1.20. Для точки, движение которой рассматривалось в примере 1.19, определить ускорения \mathbf{a} и \mathbf{a}_1 соответственно для положения точек A и A_1 .

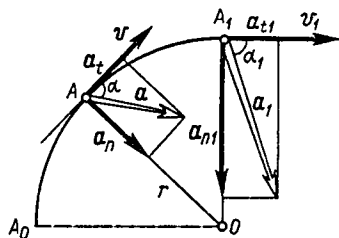


Рис. 1.113

Решение. 1. Точка движется согласно уравнению $s = \pi t^2$; следовательно, $v = 2\pi t$ и из формулы (1.86)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = (2\pi t)' = 2\pi = 6,28 \text{ м/с}^2 = \text{const};$$

модуль касательного ускорения от времени не зависит, значит при любом положении точки на траектории ее касательное ускорение $a_t = 6,28 \text{ м/с}^2$.

2. Как известно из примера 1.19, в момент, когда точка занимает на траектории положение A , ее скорость $v = 4\pi \approx 12,6 \text{ м/с}$. Следовательно, в этот момент согласно формуле (1.87) значение нормального ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(4\pi)^2}{16} = \pi^2 = 9,86 \text{ м/с}^2.$$

3. Находим направление ускорения \mathbf{a} точки в момент, когда она проходит положение A , используя третью из формул (1.90) (рис. 1.113):

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2} = 1,57; \quad \alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{v}) = \text{arctg } 1,57 = 56^\circ 36'$$

4. Находим модуль ускорения точки, используя первую из формул (1.90):

$$a = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{9,86}{\sin 56^\circ 36'} \approx 11,7 \text{ м/с}^2.$$

Рекомендуется самостоятельно проверить полученный результат по формуле (1.89), а затем найти модуль и направление ускорения точки в положении A . (Ответ: $a_1 = 20,8 \text{ м/с}^2$; $\alpha = 72^\circ 30'$.)

§ 1.29. Частные случаи движения точки. Кинематические графики

Итак, в общем случае ускорение точки разлагается на два слагаемых: касательное ускорение a_t характеризует быстроту изменения модуля скорости, нор-

мальное ускорение a_n характеризует быстроту изменения направления скорости. Иначе говоря, касательное ускорение служит характеристикой *неравномерности* движения по любой траектории, а нормальное ускорение — характеристикой *криволинейности* движения и при $a_t \neq 0$ и $a_n \neq 0$ точка движется неравномерно по криволинейной траектории.

Рассмотрим частные случаи движения точки, когда одно или оба слагаемых a равны нулю либо сохраняют отличное от нуля постоянное значение.

Прямолинейное движение. Если $a_n = 0$, то точка движется *прямолинейно*, так как при $a_n = v^2/\rho = 0$ направление скорости остается неизменным, а это возможно лишь при движении точки по прямолинейной траектории (равенство $v^2/\rho = 0$ возможно лишь при $\rho \neq \infty$).

Равномерное движение. Если $a_t = 0$, то движение точки называется *равномерным*, так как при этом числовое значение (модуль) скорости остается постоянным. Значит, при $a_t = 0$ $v = \text{const}$ и выражение (1.85) принимает вид

$$ds/dt = v = \text{const.}$$

Отсюда

$$ds = v dt.$$

Так как при движении точки в течение времени от 0 до t расстояние изменяется от s_0 до s , то, интегрируя это уравнение в соответствующих интервалах:

$$\int_{s_0}^s ds = v \int_0^t dt; \quad s - s_0 = vt,$$

получаем уравнение равномерного движения

$$s = s_0 + vt. \quad (1.91)$$

При начальном расстоянии $s_0 = 0$, т. е. точка в момент начала движения находится в начале отсчета расстояний, уравнение равномерного движения упрощается:

$$s = vt. \quad (1.92)$$

Если $a_t = 0$ и $a_n = 0$, то движение точки называется *равномерным прямолинейным*. Если $a_t = 0$ и $a_n \neq 0$, то точка движется *равномерно по криволинейной траектории*.

Известный интерес представляет равномерное дви-

жение точки по окружности (рис. 1.114). При таком движении $a_t = 0$ и $a_n = v^2/\rho = \text{const}$, так как при равномерном движении $v = \text{const}$, а при движении по окружности $\rho = r = \text{const}$.

Из формулы (1.91) скорость равномерного движения по окружности

$$v = (s - s_0)/t.$$

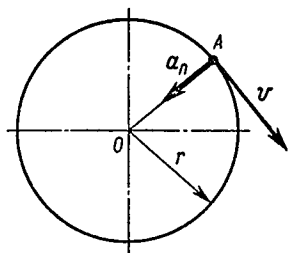


Рис. 1.114

Если принять $t = T$ -периоду, т. е. времени одного обхода точкой окружности, то $s - s_0 = 2\pi r$ и

$$v = 2\pi r/T \text{ или } v = \pi d/T, \quad (1.93)$$

где $d = 2r$ — диаметр окружности.

Равнопеременное движение. Если $a_t = dv/dt = \text{const}$, то движение точки называется *равнопеременным*. Отсюда после разделения переменных

$$dv = a_t dt.$$

Проинтегрировав левую часть уравнения в интервале от v_0 до v , а правую соответственно в интервале от 0 до t :

$$\int_{v_0}^v dv = a_t \int_0^t dt; \quad v - v_0 = a_t t,$$

получим формулу (уравнение) скорости равнопеременного движения в любой момент времени

$$v = v_0 + a_t t. \quad (1.94)$$

Здесь, как известно, $v = ds/dt$. Разделив в этом выражении переменные, получим $ds = v dt$, или, имея в виду уравнение (1.94),

$$ds = v_0 dt + a_t t dt.$$

Полагая, что при изменении времени от 0 до t расстояние изменяется соответственно от s_0 до s , проинтегрируем уравнение в этих интервалах:

$$\int_{s_0}^s ds = v_0 \int_0^t dt + a_t \int_0^t t dt; \quad s - s_0 = v_0 t + a_t (t^2/2),$$

получим уравнение равнопеременного движения точки

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}. \quad (1.95)$$

В случае, когда равнопеременное движение точки происходит по прямой линии,

$$a_n = 0 \text{ и } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_t^2} = a_t.$$

Поэтому при равнопеременном прямолинейном движении в уравнениях (1.94) и (1.95) вместо касательного ускорения a_t стоит ускорение a .

В уравнения (1.94) и (1.95) входят шесть различных величин: три постоянные для данного движения — s_0 , v_0 , a_t и три переменные — s , v , t . Таким образом, для решения задач на равнопеременное движение точки в условии должны быть заданы четыре величины из шести.

Для упрощения решения некоторых задач из уравнений (1.94) и (1.95) можно получить две вспомогательные формулы. Выразив t из уравнения (1.94), т. е. $t = (v - v_0)/a_t$, и подставив это значение в уравнение (1.95):

$$s = s_0 + \frac{v_0(v - v_0)}{a_t} + \frac{a_t}{2} \left(\frac{v - v_0}{a_t} \right)^2,$$

после раскрытия скобок и сложения двух последних слагаемых в правой части получим первую вспомогательную формулу

$$s = s_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t}. \quad (1.96)$$

Выразим a_t из уравнения (1.94), т. е. $a_t = (v - v_0)/t$, и подставим в уравнение (1.95):

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{(v - v_0) t^2}{2t},$$

после упрощений получим вторую вспомогательную формулу

$$s = s_0 + \frac{(v_0 + v) t}{2}, \quad (1.97)$$

где $(v_0 + v)/2 = v_{ср}$ — средняя скорость точки при ее равнопеременном движении.

Если равноускоренное движение точки начинается

из начала отсчета траектории ($s_0=0$) и без начальной скорости ($v_0=0$), то формулы (1.94), (1.95), (1.96) и (1.97) приобретают более простой вид:

$$v = a_t t; \quad s = \frac{a_t t^2}{2}; \quad s = \frac{v^2}{2a_t}; \quad s = \frac{vt}{2}. \quad (1.98)$$

Примерами такого движения могут служить движение автомобиля при трогании с места или движение самолета на взлетной полосе, а также известное из физики свободное падение тел. При свободном падении $a_t = a = g = 9,81 \text{ м/с}^2$. В этом случае, если в формулах (1.98) заменить s высотой падения H , они примут вид:

$$v = gt; \quad H = gt^2/2; \quad H = v^2/(2g); \quad H = vt/2. \quad (1.99)$$

Предпоследняя из этих формул, представленная в виде $v = \sqrt{2gH}$, называется формулой Галилея.

Кинематические графики. Описанные выше движения точки как при решении задач, так и просто ради большей наглядности целесообразно изображать в виде графиков расстояний, скоростей и касательных ускорений, построенных в осях (s, t) , (v, t) и (a, t) с соблюдением соответствующих масштабов.

С точки зрения математики геометрическим образом уравнения равномерного движения $s = s_0 + vt$ является прямая линия с начальной ординатой s_0 и наклоненная к оси времени под углом $\alpha = \text{arctg } v$ (рис. 1.115, а). Чем с большей скоростью движется точка, тем круче расположен график расстояний относительно оси времени. График скорости обычно располагается под графиком расстояний, причем масштаб по оси времени на обоих графиках берется одинаковым. В данном случае (при равномерном

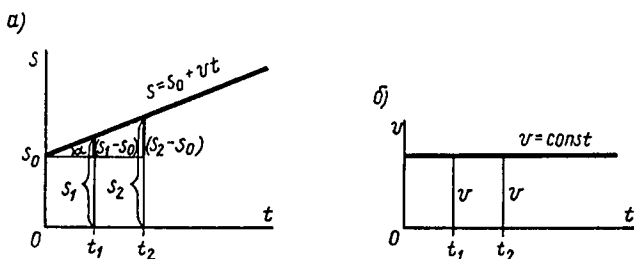


Рис. 1.115

движении) $v = \text{const}$, поэтому график скорости изображается прямой, параллельной оси времени (рис. 1.115, б), т. е. значение скорости в любой момент времени t одно и то же.

График расстояний не следует отождествлять с траекторией движения точки: при равномерном движении точки график расстояний всегда прямая линия, тогда как точка может двигаться по какой угодно криволинейной траектории.

Из графиков на рис. 1.115 видно, что в моменты времени t_1 и t_2 скорость точки одна и та же, расстояние от s_1 до s_2 изменилось по линейному закону, а пройденный путь возрос от $L_1 = s_1 - s_0$ до $L_2 = s_2 - s_0$ пропорционально увеличению времени от t_1 до t_2 . Если движение точки происходит согласно уравнению $s = vt$, то график расстояний изображается прямой, проходящей через начало координат.

Геометрический образ уравнения равнопеременного движения $s = s_0 + v_0 t + a_t t^2 / 2$ есть парабола, изменение скорости точки $v = v_0 + a_t t$ изобразится знакомой уже прямой с начальной ординатой v_0 , а постоянное касательное ускорение изобразится прямой, параллельной оси времени. На рис. 1.116, а—в изображены графики равнопеременного движения при $s_0 = 0$ и $v_0 = 0$.

Пример 1.21. Точка движется прямолинейно согласно уравнению $s = 20t - 5t^2$ (s — м, t — с). Построить графики расстояний, скорости и ускорений для первых четырех секунд движения. Определить путь, пройденный точкой за 4 с, и описать движение точки.

Решение. 1. Точка движется прямолинейно по уравнению $s = 20t - 5t^2$; следовательно, скорость точки $v = ds/dt = 20 - 10t$ и

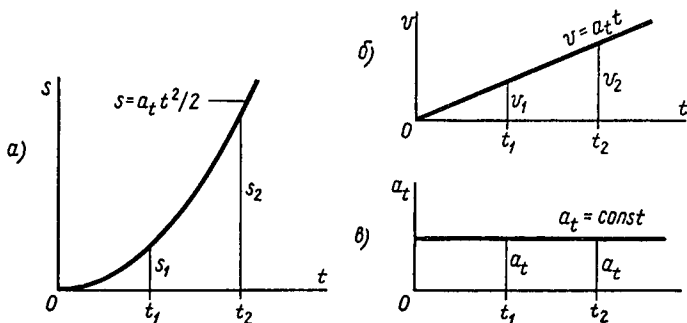


Рис. 1.116

ускорение $a = a_t = dv/dt = -10 \text{ м/с}^2$. Значит, движение точки равно-переменное ($a = a_t = -10 \text{ м/с}^2 = \text{const}$) с начальной скоростью $v_0 = 20 \text{ м/с}$.

2. Составим зависимость числовых значений s и v для первых четырех секунд движения:

$t, \text{с}$	0	1	2	3	4
$s = 20t - 5t^2, \text{м}$	0	15	20	15	0
$v = 20 - 10t, \text{м/с}$	20	10	0	-10	-20
$a = -10 \text{ м/с}^2$	от времени не зависит				

3. По приведенным числовым значениям построим графики расстояний (рис. 1.117, а), скорости (рис. 1.117, б) и ускорений (рис. 1.117, в), выбрав масштабы для изображения по осям ординат расстояний s , скорости v и ускорения a , а также одинаковый для всех графиков масштаб времени по оси абсцисс. Например, если расстояние $s = 5 \text{ м}$ изображать на графике длиной отрезка $l_s = 10 \text{ мм}$, то $5 \text{ м} = \mu_s \cdot 10 \text{ мм}$, где коэффициент пропорциональности μ_s и есть масштаб по оси Os : $\mu_s = 5/10 = 0,5 \text{ м/мм}$ ($0,5 \text{ м}$ в 1 мм); если модуль скорости $v = 10 \text{ м/с}$ изображать на графике длиной $l_v = 10 \text{ мм}$, то масштаб по оси Ov $\mu_v = 1 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}$ (1 м/с в 1 мм);

если модуль ускорения $a = 10 \text{ м/с}^2$ изображать отрезком $l_a = 10 \text{ мм}$, то аналогично предыдущему масштаб по оси Oa $\mu_a = 1 \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}$ (1 м/с^2 в 1 мм); и наконец, изображая промежуток времени $\Delta t = 1 \text{ с}$ отрезком $l_t = 10 \text{ мм}$, получим на всех графиках масштаб по осям Ot $\mu_t = 0,1 \text{ с/мм}$ ($0,1 \text{ с}$ в 1 мм).

4. Из рассмотрения графиков следует, что в течение времени от 0 до 2 с точка движется равнозамедленно (скорость v и ускорение $a = a_t$ в течение этого промежутка времени имеют разные знаки, значит их векторы направлены в противоположные стороны); в период времени от 2 до 4 с точка движется равноускоренно (скорость и ускорение имеют одинаковые знаки, т. е. их векторы направлены в одну сторону).

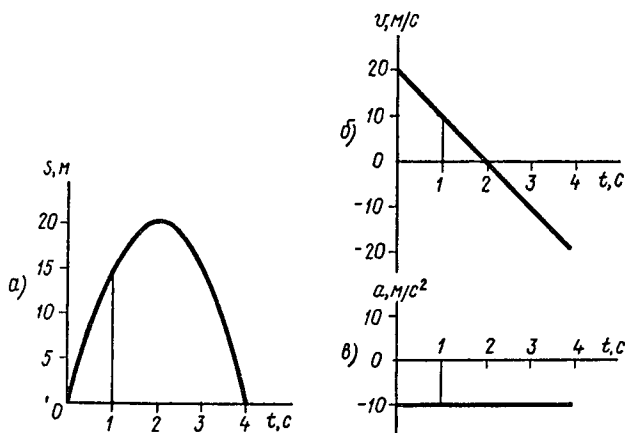


Рис. 1.117

5. За 4 с точка прошла путь $s_{0-4}=40$ м. Начав движение со скоростью $v_0=20$ м/с, точка по прямой прошла 20 м, а затем вернулась в исходное положение, имея ту же скорость, но направленную в противоположную сторону.

Если условно принять ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с² и пренебречь сопротивлением воздуха, то можно сказать, что графики описывают движение материальной точки (например, камня), брошенной вертикально вверх со скоростью $v_0=20$ м/с.

§ 1.30. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения

Если движение точки задано в координатной форме, то каждое из уравнений (1.81) или (1.82), взятое отдельно, описывает движение не самой точки, а ее проекции вдоль соответствующих осей. Пусть движение точки A в плоской системе координат задано уравнениями $x=f_1(t)$ и $y=f_2(t)$. Первое из уравнений определяет закон изменения абсциссы x движущейся точки (рис. 1.118), т. е. описывает движение по оси абсцисс точки A_x — проекции точки A на ось x . Второе уравнение определяет закон изменения ординаты y точки A , т. е. описывает движение по оси ординат ее проекции A_y на эту ось. Допустим, что в данный момент времени t точка A имеет скорость v , тогда A_x и A_y — проекции точки на оси x и y — движутся по осям со скоростями v_x и v_y , модули которых равны проекциям скорости v на соответствующие оси (рис. 1.118). Следовательно, дифференцируя каждое из заданных уравнений, найдем модули скоростей v_x и v_y или, иначе говоря, проекции скорости v на оси координат. Итак,

$$v_x = dx/dt = f'_1(t) \quad \text{и} \quad v_y = dy/dt = f'_2(t). \quad (1.100)$$

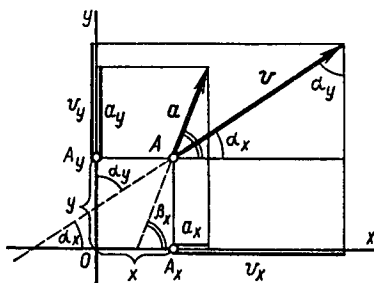


Рис. 1.118

Если из начала и конца вектора \mathbf{v} провести прямые, параллельные осям координат, то получим прямоугольный треугольник с гипотенузой v и катетами v_x и v_y . Отсюда модуль искомой скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.101)$$

Направление скорости \mathbf{v} , т. е. углы $\alpha_x = (\mathbf{v}, \hat{x})$ или

$\alpha_y = (\mathbf{v}, \hat{y})$, находим по одной из следующих формул:

$$\cos \alpha_x = v_x/v; \quad \cos \alpha_y = v_y/v \quad (1.102)$$

или

$$\sin \alpha_x = v_y/v; \quad \cos \alpha_y = v_x/v, \quad (1.103)$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha_x = v_y/v_x; \quad \operatorname{tg} \alpha_y = v_x/v_y. \quad (1.104)$$

Аналогично определяется и вектор ускорения \mathbf{a} . Сначала находим его проекции на оси x и y :

$$a_x = dv_x/dt = f''(t) \quad \text{и} \quad a_y = dv_y/dt = f''(t), \quad (1.105)$$

а затем модуль

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (1.106)$$

и направление, т. е. углы $\beta_x = (\mathbf{a}, \hat{x})$ и $\beta_y = (\mathbf{a}, \hat{y})$ (угол β_y на рис. 1.118 не обозначен):

$$\cos \beta_x = a_x/a; \quad \cos \beta_y = a_y/a. \quad (1.107)$$

От координатного способа задания движения точки нетрудно перейти к естественному способу. Из § 1.26 известно, что, исключив время из уравнений движения $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, получаем уравнение траектории $\Phi(x, y)=0$. Уравнение движения $s=f(t)$ по этой траектории получаем следующим образом. Так как $v=ds/dt$, то $ds=vdt$; подставив сюда значение $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$, полученное из уравнений движения в осях координат, и проинтегрировав:

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt, \quad (1.108)$$

получим уравнения движения вида $s=f(t)$.

Например, если движение точки задано уравнениями $x=3t^2$ и $y=4t^2$, то точка движется по

прямолинейной траектории, уравнение которой $4x - 3y = 0$.

Из заданных уравнений движения следует, что проекции скорости на оси координат

$$v_x = 6t \text{ и } v_y = 8t,$$

а модуль скорости в любой момент времени

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36t^2 + 64t^2} = 10t.$$

Из уравнения (1.108)

$$s = \int_0^t 10t \, dt = 10 \int_0^t t \, dt = 5t^2.$$

Таким образом, точка движется прямолинейно по траектории $4x - 3y = 0$ согласно уравнению $s = 5t^2$.

Вопросы для самопроверки

1. Есть ли различие между понятиями «путь» и «расстояние»?
2. При рассмотрении движения какой-либо точки значения пути и расстояния могут ли не совпадать? Могут ли они быть равными между собой? Приведите примеры.
3. Точка за t с прошла путь s м, зависит ли средняя скорость точки от закона движения или его изменения в течение t с?
4. Как определить касательное и нормальное ускорение точки, если закон ее движения по заданной траектории подчиняется уравнению $s = f(t)$?
5. Как движется точка, если: а) $a_n = 0$ и $a_t = 0$; б) $a_n = 0$ и $a_t \neq 0$; в) $a_n \neq 0$ и $a_t = 0$; г) $a_n \neq 0$ и $a_t \neq 0$?
6. Имеет ли ускорение точка, равномерно движущаяся по окружности?

Глава 8. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1.31. Поступательное движение

Движение твердого тела, при котором любой выбранный в теле отрезок прямой перемещается, оставаясь параллельным своему первоначальному положению, называется поступательным. Из всех разновидностей движений тел поступательное наиболее простое. При поступательном движении все его точки перемещаются одинаково — траектории всех точек тела одинаковы, скорости и ускорения всех точек тела в каждый данный момент времени равны между собой.

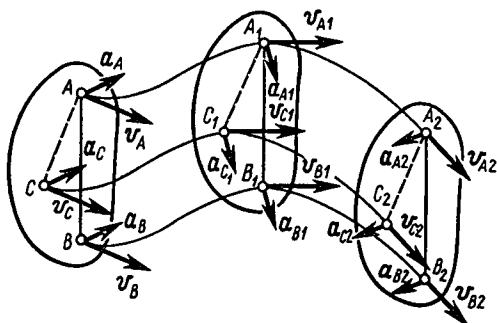


Рис. 1.119

Для доказательства этого утверждения рассмотрим две точки A и B , соединенные отрезком AB (рис. 1.119). Очевидно, что при перемещении отрезка AB параллельно первоначальному положению ($AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$) точки A и B движутся по одинаковым траекториям, т. е. если траекторию BB_1B_2 совместить с траекторией AA_1A_2 , то они совпадут. Если вместе с точкой A рассмотреть движение точки C , то при движении тела отрезок AC также остается параллельным своему первоначальному положению ($AC \parallel A_1C_1 \parallel A_2C_2$) и траектория точки C (кривая CC_1C_2) одинакова с траекториями AA_1A_2 и BB_1B_2 . Следовательно, скорости точек A , B и C в каждый данный момент времени направлены одинаково — по параллельным касательным к своим траекториям в точках A , B и C , через некоторое время по параллельным касательным в точках A_1 , B_1 и C_1 , а затем в точках A_2 , B_2 и C_2 . Но за любые сколь угодно малые промежутки времени Δt точки A , B и C проходят по своим траекториям равные пути, значит и значения скоростей в любой момент времени равны между собой. Таким образом, в каждый данный момент времени скорости всех точек тела равны между собой, т. е. $v_A = v_B = v_C$ или $v_{A1} = v_{B1} = v_{C1}$, или $v_{A2} = v_{B2} = v_{C2}$. Отсюда следует, что изменение скоростей всех точек как по модулю, так и по направлению происходит одинаково, т. е. в каждый данный момент ускорения точек также равны между собой: $a_A = a_B = a_C$ или $a_{A1} = a_{B1} = a_{C1}$, или $a_{A2} = a_{B2} = a_{C2}$.

Как видим, поступательное движение твердого тела полностью характеризуется движением любой его точки. Обычно поступательное движение тела задается движением его центра тяжести. Иначе

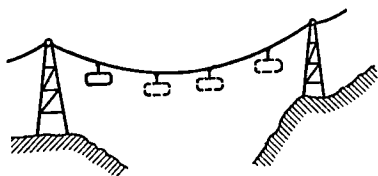


Рис. 1.120

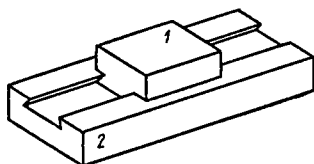


Рис. 1.121

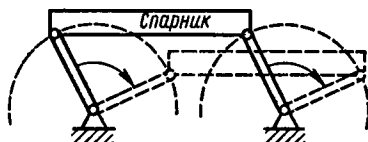


Рис. 1.122

говоря, при поступательном движении тело можно считать материальной точкой.

Примерами поступательного движения тел могут служить какой-либо ползун *1*, движущийся в прямолинейных направляющих *2* (рис. 1.120), или прямолинейно движущийся автомобиль (вернее, не весь автомобиль, а его шасси с кузовом). Иногда криволинейное движение на поворотах дорог автомобилей или поездов условно принимают за поступательное. В подобных случаях говорят, что автомобиль или поезд движется с такой-то скоростью или с таким-то ускорением.

Примерами криволинейного поступательного движения служат движение вагончика (люльки) подвесной канатной дороги (рис. 1.121) или движение спарника, соединяющего два параллельных кривошипа (рис. 1.122). В последнем случае каждая точка спарника движется по окружности.

§ 1.32. Вращательное движение. Угловая скорость; угловое ускорение

Движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются по окружностям с центрами, расположенными на перпендикулярной этим окружностям неподвижной прямой, называется вращательным. Неподвижная прямая, на которой лежат центры круговых траекторий точек тела, называется его осью вращения. Для образования оси вращения достаточно закрепить какие-либо две точки тела. В качестве примеров вращательного движения тел

можно привести движение дверей или створок окон при их открывании или закрывании, движение роторов электродвигателей или гидротурбин, движение стрелок часов и т. п. В каждой машине и любом механизме есть вращающиеся детали.

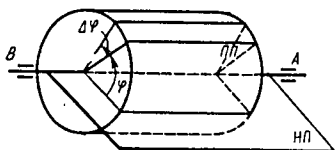


Рис. 1.123

Представим себе тело в виде цилиндра, ось AB которого лежит в подшипниках (рис. 1.123). Все точки твердого тела неизменно связаны между собой, поэтому при вращении тела они движутся не одинаково: точки, лежащие на оси, неподвижны, точки, расположенные ближе к оси, движутся медленнее точек, расположенных дальше от оси. Таким образом, движением одной какой-либо точки однозначно определить вращательное движение тела нельзя.

Для установления закона вращательного движения тела, по которому можно определять его положение в данный момент, проведем через ось вращения тела, связанную только с нею, неподвижную полуплоскость НП, а внутри тела отметим подвижную полуплоскость, которая вращается около оси вместе с телом. Теперь угол φ , образуемый в каждый данный момент времени полуплоскостями НП и ПП (рис. 1.123), точно определяет положение тела в пространстве. Угол φ называется *углом поворота* и выражается в радианах. Чтобы определять положение тела в пространстве в любой момент времени, необходимо знать зависимость между углом поворота φ и временем t , т. е. знать *закон вращательного движения тела*, заданный уравнением

$$\varphi = f(t). \quad (1.109)$$

Быстрота изменения угла поворота во времени характеризуется величиной, которая называется *угловой скоростью*.

Чтобы определить угловую скорость тела, представим, что в некоторый момент времени t положение вращающегося тела определяется углом поворота φ (рис. 1.123), а в момент $t + \Delta t$ — углом поворота $\varphi + \Delta\varphi$. Следовательно, за время Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ и величина

$$\omega_{cp} = \Delta\phi / \Delta t \quad (1.110)$$

называется *средней угловой скоростью*. При постепенном уменьшении Δt уменьшается и $\Delta\phi$, а средняя угловая скорость, изменяясь, стремится в пределе к значению угловой скорости в момент времени t :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\phi / \Delta t = d\phi / dt,$$

т. е. *угловая скорость в любой момент времени равна первой производной от угла поворота по времени*:

$$\omega = d\phi / dt = f'(t). \quad (1.111)$$

Если угол поворота выражается в радианах, а время в секундах, то единицей угловой скорости является 1 рад/с.

Характеристикой быстроты изменения угловой скорости служит *угловое ускорение*, обозначаемое ε . Причем если среднее ускорение

$$\varepsilon_{cp} = \Delta\omega / \Delta t,$$

то при $\Delta t \rightarrow 0$, $\varepsilon_{cp} \rightarrow \varepsilon$ — к угловому ускорению тела в данный момент или

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\omega / \Delta t = d\omega / dt.$$

Значит, *угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени*:

$$\varepsilon = d\omega / dt = d^2\phi / dt^2 = f''(t). \quad (1.112)$$

Единица углового ускорения 1 рад/с².

Если вдоль оси вращения тела провести какую-либо из осей координат и смотреть на вращающееся тело со стороны положительного направления оси, то увидим, что тело вращается либо по ходу стрелок часов, либо против их хода. Условимся в этом случае угол поворота, отсчитываемый против хода стрелок часов, считать положительным, а отсчитываемый по ходу стрелок часов — отрицательным. Например, на рис. 1.123 угол ϕ положительный при направлении оси от A к B .

Используя это правило, можно угловую скорость и угловое ускорение рассматривать как векторы ω и ε , направленные вдоль оси вращения. На рис. 1.124 вращающееся тело изображено в осях

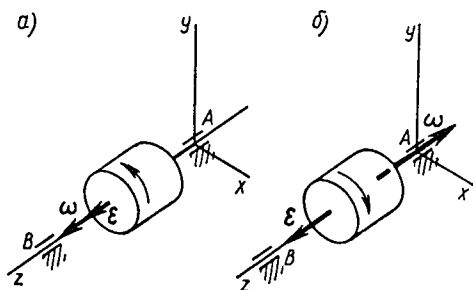


Рис. 1.124

координат, причем ось z совмещена с осью вращения. На рис. 1.124, *a* тело вращается против хода часовой стрелки и вектор угловой скорости ω направлен по оси z в сторону ее положительного отсчета. На рис. 1.124, *б* тело вращается по ходу стрелки часов и вектор угловой скорости направлен противоположно положительному направлению оси.

Если векторы ω и ε направлены в одну сторону, то вращательное движение тела ускоренное — угловая скорость возрастает. Если векторы ω и ε направлены в противоположные стороны, то вращение тела замедленное — угловая скорость уменьшается.

§ 1.33. Частные случаи вращательного движения

Равномерное вращательное движение. Если угловое ускорение $\varepsilon = 0$, и, следовательно, угловая скорость

$$\omega = d\varphi/dt = \text{const}, \quad (1.113)$$

то вращательное движение называется *равномерным*.

Из выражения (1.113) после деления переменных

$$d\varphi = \omega dt.$$

Если при изменении времени от 0 до t угол поворота изменялся от φ_0 (начальный угол поворота) до φ , то, интегрируя уравнение в этих пределах:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt,$$

получаем уравнение равномерного вращательного движения

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t,$$

которое в окончательном виде записывается так:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (1.114)$$

Если $\varphi_0 = 0$, то

$$\varphi = \omega t. \quad (1.115)$$

Таким образом, при равномерном вращательном движении угловая скорость

$$\omega = (\varphi - \varphi_0)/t \text{ или при } \varphi_0 = 0 \quad \omega = \varphi/t.$$

Равнопеременное вращательное движение. Если угловое ускорение

$$\varepsilon = d\omega/dt = \text{const}, \quad (1.116)$$

то вращательное движение называется *равнопеременным*.

Причем при $\varepsilon > 0$ (векторы ω и ε направлены в одну и ту же сторону) вращательное движение равноускоренное и при $\varepsilon < 0$ (векторы ω и ε направлены в противоположные стороны) вращательное движение равнозамедленное.

Производя разделение переменных в выражении (1.116):

$$d\omega = \varepsilon dt$$

и приняв, что при изменении времени от 0 до t угловая скорость изменилась от ω_0 (начальная угловая скорость) до ω , проинтегрируем уравнение в этих пределах:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt \text{ или } \omega - \omega_0 = \varepsilon t,$$

т. е. получим уравнение

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (1.117)$$

выражающее значение угловой скорости в любой момент времени.

Для вывода уравнения, выражающего закон равнопеременного вращательного движения, воспользуемся формулой (1.111), из которой следует, что $d\varphi = \omega dt$ или с учетом уравнения (1.117)

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt.$$

Полагая, что в течение времени от 0 до t угол поворота изменялся от φ_0 до φ , проинтегрируем уравнение в этих пределах:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt \quad \text{или} \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2.$$

Отсюда получаем уравнение равнопеременного вращательного движения в окончательном виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2. \quad (1.118)$$

Сравнивая формулы (1.114), (1.115), (1.116) и (1.118) с формулами (1.91), (1.92), (1.94) и (1.95) из § 1.29, замечаем их математическую аналогичность. Но при этом следует учитывать, что формулы § 1.29 применимы при рассмотрении движения точки или тела, но только при его поступательном движении. Формулы (1.114) и (1.115), (1.117) и (1.118) применимы лишь при рассмотрении соответственно равномерного или равнопеременного вращательного движения тела.

Так же как в § 1.29, из формул (1.117) и (1.118)—основных формул, характеризующих равнопеременное вращательное движение, можно получить две вспомогательные формулы. Исключив из формул (1.117) и (1.118) время t , получим

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{2\varepsilon}. \quad (1.119)$$

Исключив из тех же формул угловое ускорение ε , получим вторую вспомогательную формулу

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}, \quad (1.120)$$

где $\frac{(\omega_0 + \omega)}{2} = \omega_{cp}$ — средняя угловая скорость при равнопеременном вращательном движении.

В тех случаях равноускоренного вращательного движения, когда $\varphi_0 = 0$ и $\omega_0 = 0$, формулы (1.117), (1.118), (1.119) и (1.120) приобретают более простой вид:

$$\omega = \varepsilon t; \quad \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \varphi = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}; \quad \varphi = \frac{\omega t}{2}. \quad (1.121)$$

При постановке и решении технических задач в условиях промышленного производства или в процессе конструирования часто угловое перемещение φ выражают не в радианах, а просто в оборотах. Угловое перемещение тела, выраженное в оборотах, обозначим $\varphi_{об}$ (т. е. $\varphi_{об}$ выражает количество оборо-

тов тела за какой-то промежуток времени); тогда угол поворота в радианах φ выражается через количество оборотов $\varphi_{об}$ следующим образом:

$$\varphi = 2\pi\varphi_{об}, \quad (1.122)$$

так как при одном обороте вокруг оси тело поворачивается на 2π рад.

Из выражения (1.122) следует, что

$$\varphi_{об} = \varphi / (2\pi). \quad (1.123)$$

Угловая скорость, выражаемая количеством оборотов в минуту, называется *частотой вращения* и обозначается n . Установим зависимость между ω (рад/с) и n (об/мин). Так как $\omega = \varphi/t$, то при n об/мин за $t = 1$ мин = 60 с угол поворота $\varphi = 2\pi n$; следовательно,

$$\omega = 2\pi n / 60 = \pi n / 30. \quad (1.124)$$

При переходе от угловой скорости ω (рад/с) к частоте вращения n (об/мин) имеем

$$n = 30\omega / \pi. \quad (1.125)$$

Пример 1.22. Через 30 с равномерного вращения с частотой $n_0 = 600$ об/мин тело начало равнозамедленное движение и в течение последующих 20 с частота вращения тела уменьшилась до $n = 450$ об/мин.

Определить угловое ускорение тела при равнозамедленном вращательном движении, а также число оборотов тела за время равномерного и равнозамедленного движения.

Решение. 1. Переведем начальную и конечную частоты вращения тела в единицы угловой скорости:

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi 600}{30} = 20\pi \text{ рад/с} = 62,8 \text{ рад/с};$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 450}{30} = 15\pi \text{ рад/с} = 47,1 \text{ рад/с}.$$

2. За время $t_1 = 30$ с тело, вращаясь равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 20\pi$ рад/с, повернулось на угол

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 = 20\pi 30 = 600\pi \text{ рад} = 1884 \text{ рад}.$$

3. Из формулы (1.117) угловое ускорение, с которым тело вращалось в течение времени $t_2 = 20$ с,

$$\varepsilon = \frac{(\omega - \omega_0)}{t_2} = \frac{15\pi - 20\pi}{20} = -\frac{\pi}{4} \text{ рад/с}^2 = -0,785 \text{ рад/с}^2.$$

4. За время равнозамедленного вращения тело повернулось на угол

$$\varphi_2 = \omega_0 t_2 + \frac{\varepsilon t_2^2}{2} = 20\pi 20 - \frac{(\pi/4) 20^2}{2} =$$

$$= 400\pi - 50\pi = 350\pi \text{ рад} = 1100 \text{ рад.}$$

5. За весь промежуток времени $t_1 + t_2 = 50$ с тело повернулось на угол

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 600\pi + 350\pi = 950\pi \text{ рад} = 2984 \text{ рад,}$$

следовательно, тело сделало

$$\varphi_{об1} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{950\pi}{2\pi} = 475 \text{ об.}$$

Для определения числа оборотов, сделанных телом, можно было частоту вращения и не переводить в единицы угловой скорости. За время $t_2 = 30 \text{ с} = 0,5 \text{ мин}$ при равномерном вращении тело сделало

$$\varphi_{об} = n_0 t_1 = 600 \cdot 0,5 = 300 \text{ об.}$$

За время $t_2 = 20 \text{ с} = 1/3 \text{ мин}$ при равнозамедленном вращении тело сделало [см. формулу (1.120)]

$$\varphi_{об2} = \frac{(n_0 + n) t}{2} = \frac{(600 + 450) \frac{1}{3}}{2} = 175 \text{ об.}$$

Всего $\varphi_{об} = \varphi_{об1} + \varphi_{об2} = 300 + 175 = 475 \text{ об.}$

§ 1.34. Скорости и ускорения различных точек вращающегося тела

Как уже отмечалось выше (см. § 1.32), точки вращающегося тела движутся не одинаково. Но, зная закон вращательного движения тела, можно определять скорость и ускорение любой точки в любой момент времени. Для этой цели установим зависимость между угловыми величинами φ , ω и ε , характеризующими вращательное движение тела, и линейными величинами s , v , a_t , a_n и a , характеризующими движение точек тела.

Допустим, что тело, показанное на рис. 1.125, вращается согласно уравнению $\varphi = f(t)$, и требуется определить скорость v и ускорение a точки A этого тела, расположенной на расстоянии ρ от оси вращения O . Пусть тело за некоторое время t повернулось на угол φ и точка A , двигаясь по окружности из некоторого начального положения

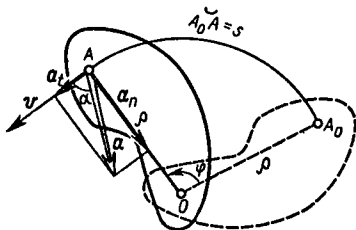


Рис. 1.125

A_0 , переместилась на расстояние $s = \overset{\sim}{A_0} A$. Так как угол φ выражается в радианах, то

$$s = r\varphi, \quad (1.126)$$

т. е. расстояние, пройденное точкой вращающегося тела, пропорционально его углу поворота. Расстояние s и угол поворота φ — функции времени, а r — величина, постоянная для данной точки; продифференцируем по времени обе части равенства (1.126) и получим

$$ds/dt = r d\varphi/dt,$$

но $ds/dt = v$ — скорость точки, а $d\varphi/dt = \omega$ — угловая скорость тела, поэтому

$$v = r\omega, \quad (1.127)$$

т. е. *скорость точки вращающегося тела пропорциональна его угловой скорости.*

Из формулы (1.127) видно, что для точек, расположенных на оси вращения, $r = 0$ и скорости этих точек также равны нулю, а по мере изменения r , т. е. у точек, находящихся дальше от оси вращения, скорости тем больше, чем больше значение r . Пропорциональная зависимость скоростей различных точек вращающегося тела от их расстояний от оси вращения показана на рис. 1.126.

Продифференцировав обе части равенства (1.127), имеем

$$dv/dt = r d\omega/dt,$$

но $dv/dt = a_t$ — касательное ускорение точки, а $d\omega/dt = \varepsilon$ — угловое ускорение тела. Значит,

$$a_t = r\varepsilon, \quad (1.128)$$

т. е. *касательное ускорение точки вращающегося тела пропорционально его угловому ускорению.*

Подставив в формулу (1.87) $a_n = v^2/r$ значение скорости из формулы (1.127), получим

$$a_n = r\omega^2, \quad (1.129)$$

т. е. *нормальное ускорение точки вращающегося тела пропорционально второй степени его угловой скорости.*

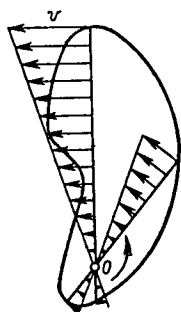


Рис. 1.126

Из формулы (1.89) $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$; после подстановки вместо a_t и a_n их значений из формул (1.128) и (1.129) получаем

$$a = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.130)$$

Направление вектора ускорения, т. е. угол $\alpha = (\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{v})$ (рис. 1.126), определяется по одной из формул (1.90), причем последнюю из них можно представить теперь в таком виде:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\rho \omega^2}{\rho \varepsilon} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2}{\varepsilon}. \quad (1.131)$$

Из формул (1.130) и (1.131) следует, что для точек тела при его вращательном движении по заданному закону можно сначала найти ускорение \mathbf{a} , а затем разложить его на касательное ускорение \mathbf{a}_t и нормальное ускорение \mathbf{a}_n , модули которых (см. рис. 1.125)

$$a_t = a \cos \alpha \quad \text{и} \quad a_n = a \sin \alpha. \quad (1.132)$$

Пример 1.23. При запуске двигателя его шкив диаметром $d = 200$ мм в течение первых нескольких секунд вращается согласно уравнению $\varphi = 0,2t^3$. Определить скорости и ускорения точек, расположенных на ободе шкива, в момент $t_1 = 5$ с.

Решение. 1. Дифференцированием уравнения движения шкива находим его угловую скорость:

$$\omega = d\varphi/dt = (0,2t^3)' = 0,6t^2.$$

В момент $t_1 = 5$ с $\omega_1 = 0,6t_1^2 = 0,6 \cdot 5^2 = 15$ рад/с.

2. Дифференцированием уравнения угловой скорости шкива находим его угловое ускорение:

$$\varepsilon = d\omega/dt = (0,6t^2)' = 1,2t.$$

В момент $t_1 = 5$ с $\varepsilon_1 = 1,2t_1 = 1,2 \cdot 5 = 6$ рад/с².

3. Имея в виду, что для точек на ободе шкива $\rho = d/2 = r = 100$ мм = 0,1 м, по формуле (1.130) находим значение ускорения этих точек:

$$a = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,1 \sqrt{6^2 + 15^4} \approx 22,5 \text{ м/с}^2.$$

Угол, образуемый вектором ускорения с касательной к ободу шкива $\alpha = (\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{v})$, находим из формулы (1.131):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2}{\varepsilon} = \frac{15^2}{6} = 37,5.$$

Отсюда по таблицам определяем $\alpha = 88^\circ 28' 20''$.

4. Можно определить модули касательного и нормального

ускорений, направления которых известны: $a_t = 0,62 \text{ м/с}^2$, $a_n = 22,5 \text{ м/с}^2$. Правильность этих ответов проверьте самостоятельно.

§ 1.35. Способы передачи вращательного движения

В технике часто возникает необходимость передачи вращательного движения от одной машины к другой (например, от электродвигателя к станку) или внутри какой-либо машины от одной вращающейся детали к другой. Механические устройства, предназначенные для передачи и преобразования вращательного движения, так и называются *передачами*. Подробно передачи рассмотрены в третьем разделе учебника, здесь мы ограничимся лишь некоторыми предварительными сведениями о передачах.

Основной кинематической характеристикой каждой передачи служит так называемое *передаточное отношение*, обозначаемое буквой i с двойным индексом. Индекс показывает, от какого вала к какому определяется данное передаточное отношение.

Передаточным отношением от одного вала к другому называется взятое со знаком плюс или минус отношение их угловых скоростей.

Передаточное отношение считается положительным, если оба вала вращаются в одну и ту же сторону. Если же валы, соединенные передачей, вращаются в противоположные стороны, то передаточное отношение считается отрицательным.

Например, передаточное отношение от вала 1 к валу 2 (рис. 1.127) имеет вид $i_{12} = \omega_1 / \omega_2$; передаточное отношение от вала 2 к валу 1 — вид $i_{21} = \omega_2 / \omega_1$; передаточное отношение от вала 2 к валу 3 — вид $i_{32} = -\omega_2 / \omega_3$; передаточное отношение от вала 1 к валу 3 — вид $i_{13} = \omega_1 / \omega_3$.

В зависимости от направления передачи вращения валы делятся на *ведущие* и *ведомые*. Например, если

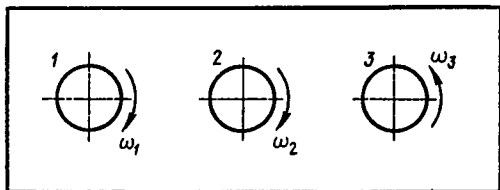


Рис. 1.127

на рис. 1.127 вращение передается от вала 1 к валу 3, то вал 1 называется ведущим, а вал 3—ведомым, тогда как вал 2 относительно первого является ведомым, а относительно третьего—ведущим.

Передаточное отношение может быть выражено через конструктивные параметры механизма. Рассмотрим некоторые простейшие передачи и выведем формулы их передаточных отношений через конструктивные параметры.

Ременная передача часто применяется в случаях, когда необходимо передать вращение между валами, расположенными на значительном расстоянии (до нескольких метров) друг от друга. Для этого на валах закрепляют шкивы, на которые натяжением надевают ремень. Вращение ведущего шкива преобразуется во вращение ведомого шкива благодаря трению между шкивом и ремнем.

На рис. 1.128, а изображена схема открытой передачи между параллельными валами 1 и 2; в этой передаче оба вала вращаются в одну сторону. Если не принимать во внимание возможное проскальзывание ремня на шкивах, то можно считать, что все точки ремня работающей передачи имеют одинаковую скорость v , такая же скорость точек и на ободах обоих шкивов. Значит на основании формулы (1.127)

$$v = 0,5 d_1 \omega_1 = 0,5 d_2 \omega_2,$$

где d_1 и d_2 —диаметры шкивов, а ω_1 и ω_2 —их угловые скорости. Отсюда получаем формулу для определения передаточного отношения открытой ременной передачи:

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = d_2 / d_1. \quad (1.133)$$

На рис. 1.128, б показана схема перекрестной передачи, при которой валы вращаются в противоположные стороны. Передаточное отношение в этом случае определяется по формуле (1.133), но со знаком минус. Таким образом, *передаточное отношение ременной*

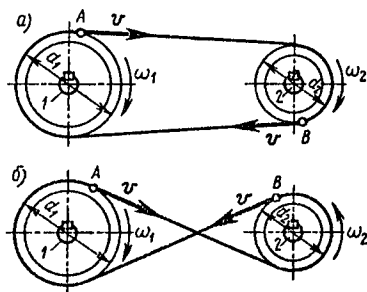


Рис. 1.128

передачи равно обратному отношению диаметров шкивов.

Фрикционная передача получила название от латинского «frictio» — трение. Во фрикционных передачах вращательное движение от одного вала к другому передается с помощью фрикционных колес (катков), жестко насаженных на валы и прижатых друг к другу.

На рис. 1.129 изображена цилиндрическая (катки имеют форму цилиндров) фрикционная передача, применяемая при параллельном расположении валов. На рис. 1.130 показана коническая фрикционная передача, применяемая в тех случаях, когда валы 1 и 2 пересекаются друг с другом.

Пренебрегая проскальзыванием катков, можно считать, что скорости соприкасающихся точек равны. Тогда согласно формуле (1.127)

$$v = 0,5d_1\omega_1 = 0,5d_2\omega_2,$$

откуда передаточное отношение фрикционной передачи

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = d_2/d_1. \quad (1.134)$$

Передаточное отношение фрикционной передачи равно обратному отношению диаметров фрикционных катков, причем для конической передачи берутся диаметры больших оснований конусов.

Зубчатые передачи можно рассматривать как видоизменение фрикционных передач, при котором на цилиндрических поверхностях фрикционных колес нарезают зубья так, чтобы зубья одного колеса входили в промежутки (впадины) между зубьями другого. Если одно из зубчатых колес придет во вращательное движение, то, зацепляясь за зубья

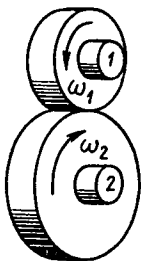


Рис. 1.129

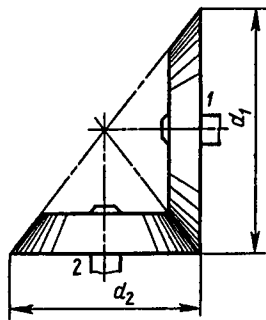


Рис. 1.130

второго, оно приведет во вращение и его. Зубчатые колеса (рис. 1.131) можно мысленно заменить двумя фрикционными колесами, из которых одно увлекает за собой второе без проскальзывания и, значит, каждое из них вращается с теми же угловыми скоростями, что и сами зубчатые колеса. Окружности таких воображаемых фрикционных колес называются *начальными окружностями* данных зубчатых колес. Диаметр, соответствующий начальной окружности зубчатого колеса, называют *начальным* и обозначают d_w .

Передаточное отношение двух зубчатых колес, находящихся в зацеплении, равно обратному отношению их начальных диаметров:

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = \mp d_{w2} / d_{w1}. \quad (1.135)$$

Передаточное отношение зубчатой передачи удобнее выражать через отношение чисел зубьев колес. У зубчатого колеса число зубьев пропорционально начальному диаметру, поэтому если числа зубьев двух колес, находящихся в зацеплении, обозначить z_1 и z_2 , то передаточное отношение зубчатой передачи примет вид

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = \mp z_2 / z_1. \quad (1.136)$$

Следовательно, *передаточное отношение зубчатой передачи равно отношению числа зубьев ведомого колеса к числу зубьев ведущего колеса.*

Зубчатая передача, изображенная на рис. 1.131, называется передачей с *внешним зацеплением*. При этой передаче валы вращаются в противоположные стороны, поэтому передаточное отношение отрицательное. Если передача имеет *внутреннее зацепление* (рис. 1.132), то валы вращаются в одну сторону и

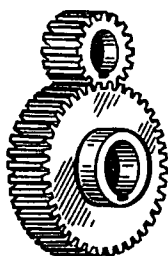


Рис. 1.131

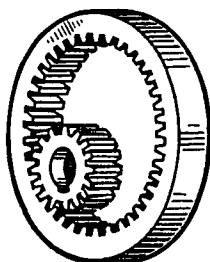


Рис. 1.132

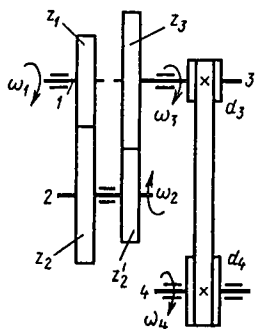


Рис. 1.133

ча вращения между валами 2 и 3 производится зубчатыми колесами с числом зубьев z_2' и z_3 и, наконец, между валами 3 и 4 вращение передается ременной передачей с диаметрами шкивов d_3 и d_4 . Для удобства вычислений у обозначений чисел зубьев и диаметров шкивов поставлены индексы, соответствующие нумерации валов.

Обозначим угловые скорости валов соответственно ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_4 и заметим, что оба колеса z_2 и z_2' , закрепленные на валу 2, имеют угловую скорость ω_2 , а колесо z_3 и шкив d_3 — угловую скорость ω_3 .

Определим теперь передаточное отношение от вала 1 к валу 4, т. е. передаточное отношение данной многоступенчатой передачи:

$$u_{14} = \omega_1 / \omega_4. \quad (a)$$

Для этого составим последовательно передаточные отношения отдельных ступеней:

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2; \quad u_{23} = \omega_2 / \omega_3; \quad u_{34} = \omega_3 / \omega_4$$

и перемножим их:

$$u_{12} u_{23} u_{34} = (\omega_1 / \omega_2) (\omega_2 / \omega_3) (\omega_3 / \omega_4) = \omega_1 / \omega_4. \quad (б)$$

Так как правые части равенств (a) и (б) одинаковы, то равны между собой и их левые части, т. е.

$$u_{14} = u_{12} u_{23} u_{34}. \quad (в)$$

Зная, что в данном случае $u_{12} = -z_2 / z_1$ (валы 1 и 2 вращаются в противоположные стороны), $u_{23} = -z_3 / z_2'$ и $u_{34} = d_4 / d_3$, передаточное отноше-

передаточное отношение принимается положительным.

Многоступенчатые передачи составляют из ряда соединенных между собой простых передач (или ступеней). Определение передаточного отношения многоступенчатой передачи рассмотрим на примере передачи, изображенной на рис. 1.133. Вращение между валами 1 и 2 передается с помощью зубчатых колес с числом зубьев z_1 и z_2 , переда-

ние

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_2'}{z_2}\right) \frac{d_4}{d_3} = \frac{z_2 z_3 d_4}{z_1 z_2' d_3}.$$

Передаточное отношение положительно, значит валы 1 и 4 вращаются в одну сторону, что подтверждает рис. 1.133.

Из последнего равенства, задавшись любой из двух угловых скоростей ω_1 или ω_4 , можно определить другую. Например, при $z_1=20$, $z_2=40$, $z_2'=24$, $z_3=36$, $d_3=160$ мм, $d_4=200$ мм и угловой скорости $\omega_4=10\pi$ рад/с (что соответствует частоте вращения $n=300$ об/мин) угловая скорость

$$\omega_1 = \omega_4 \frac{z_2 z_3 d_4}{z_1 z_2' d_3} = 10\pi \frac{40 \cdot 36 \cdot 200}{20 \cdot 24 \cdot 160} = 37,5\pi \text{ рад/с}$$

или

$$n_1 = 30 \omega_1 / \pi = 30 \cdot 37,5\pi / \pi = 1125 \text{ об/мин.}$$

Рассуждения, приведенные выше при получении формулы (в) передаточного отношения заданной на рис. 1.133 трехступенчатой передачи, можно распространить на передачу с любым числом ступеней.

Для многоступенчатой передачи формула (в) примет вид

$$u_{1n} = (-1)^k u_{12} u_{23} u_{34} \dots u_{(n-1)n} \quad (1.137)$$

— передаточное отношение многоступенчатой передачи равно произведению передаточных отношений ее отдельных ступеней. Множитель $(-1)^k$ позволяет определить знак передаточного отношения, где k — число пар сопряженных колес внешнего касания (зацепления). Если знак передаточного отношения не имеет существенного значения, то множитель $(-1)^k$ опускается.

Передаточное отношение, вычисленное без учета знака в направлении от ведущего вала к ведомому, называется передаточным числом.

Передаточное число обозначается буквой u без индексов и широко используется при расчете и проектировании передач (см. третий раздел учебника).

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры поступательного движения тела и перечислите его свойства.
2. Одно тело вращается с угловой скоростью 36 рад/с, а

другое — с частотой 300 об/мин. Которое из них вращается быстрее?

3. Определите частоту вращения и угловую скорость секундной, минутной и часовой стрелок часов.

4. От вала 1 к валу 2 вращение передается при передаточном отношении $u_{12}=2,5$. Какова угловая скорость второго вала по отношению к угловой скорости первого?

5. Передаточное отношение некоторой передачи $u_{13}=1/4$. Что можно сказать об угловой скорости третьего вала (ω_3), если $\omega_1=50$ рад/с?

ГЛАВА 9. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 1.36. Сложное движение точки

Примером сложного движения точки может служить лодка (если ее принять за материальную точку), плывущая от одного берега реки к другому. В этом случае лодка, двигаясь по реке, например, в направлении, перпендикулярном берегам, одновременно вместе с водным потоком перемещается вдоль берегов и для наблюдателя, оставшегося на берегу, движение лодки воспринимается как составленное из этих двух движений. Шагающий по ступенькам движущегося эскалатора в метро человек также совершает сложное движение относительно неподвижного свода тоннеля.

Таким образом, при сложном движении точка (в приведенных выше примерах лодка или человек), двигаясь относительно некоторой подвижной материальной среды (реки или ленты эскалатора), которую условимся называть *подвижной системой отсчета*, одновременно передвигается вместе с этой системой отсчета относительно второй системы отсчета, условно принимаемой за *неподвижную*.

Движение некоторой точки М по отношению к подвижной системе отсчета называется относительным. Движение подвижной системы отсчета вместе со всеми связанными с ней точками материальной среды по отношению к неподвижной системе отсчета называется для точки М переносным. Движение точки М по отношению к неподвижной системе отсчета называется сложным или абсолютным.

Заметим, что, для того чтобы видеть сложное (абсолютное) движение точки, наблюдатель должен сам быть связан с неподвижной системой отсчета.

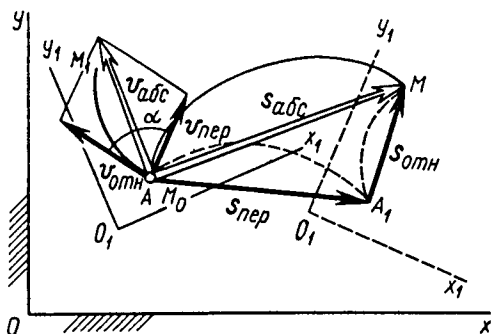


Рис. 1.134

Если же наблюдатель находится в подвижной системе отсчета, то он видит лишь относительную часть сложного движения.

Представим, что точка M (рис. 1.134) переместилась за некоторое время Δt относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1$ из начального положения M_0 в положение M_1 по траектории M_0M_1 (траектории относительного движения точки). За это же время Δt подвижная система координат $O_1x_1y_1$ вместе со всеми неизменно связанными с ней точками, а значит, и вместе с траекторией относительного движения точки M переместилась в неподвижной системе координат Oxy в новое положение (на рис. 1.134 это положение подвижной системы показано штриховыми линиями). При этом точка A подвижной системы отсчета, с которой в начальный момент совпадала движущаяся точка M , переместилась в положение A_1 по некоторой траектории AA_1 . Легко видеть, что движущаяся точка для наблюдателя, связанного с неподвижной системой отсчета Oxy , займет положение M , т. е., как это следует из рис. 1.134, абсолютное перемещение $\overline{M_0M} = s_{абс}$ точки M равно геометрической сумме перемещения $\overline{M_0M_1} = s_{пер}$ в переносном движении и перемещения $\overline{A_1M} = s_{отн}$ точки M в относительном движении:

$$s_{абс} = s_{пер} + s_{отн}. \quad (1.138)$$

Разделим обе части равенства (1.138) на время движения Δt :

$$s_{абс}/\Delta t = s_{пер}/\Delta t + s_{отн}/\Delta t$$

и получим геометрическую сумму средних скоростей:

$$v_{абс. ср} = v_{пер. ср} + v_{отн. ср}, \quad (1.139)$$

которые, как известно из § 1.25, направлены вдоль соответствующих векторов перемещений (на рис. 1.134 векторы средних скоростей не показаны).

Если теперь перейти к пределам при $\Delta t \rightarrow 0$, то получим [см. формулу (1.78) в § 1.25]: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{абс. ср} =$

$= v_{абс}$ — вектор средней абсолютной скорости стремится к вектору абсолютной скорости $v_{абс}$;

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{пер. ср} = v_{пер}$ — вектор средней переносной скорости стремится к вектору переносной скорости $v_{пер}$;

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{отн. ср} = v_{отн}$ — вектор средней относительной скорости стремится к вектору относительной скорости $v_{отн}$.

Таким образом, в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ из выражения (1.139) получим геометрическое равенство

$$v_{абс} = v_{пер} + v_{отн}, \quad (1.140)$$

выражающее теорему сложения скоростей: *при сложном движении точки абсолютная скорость в каждый момент времени равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.*

Если задан угол $\alpha = \angle(v_{пер}, v_{отн})$ (рис. 1.134), то модуль абсолютной скорости

$$v_{абс} = \sqrt{v_{пер}^2 + v_{отн}^2 + 2v_{пер}v_{отн}\cos\alpha}. \quad (1.141)$$

Углы, образуемые векторами абсолютной скорости $v_{абс}$ с векторами $v_{пер}$ и $v_{отн}$, определяются по теореме синусов.

В частном случае при $v_{пер} = v_{отн}$ при сложении этих скоростей образуется ромб (рис. 1.135, а) или равнобедренный треугольник (рис. 1.135, б) и, следовательно,

$$v_{абс} = 2v_{пер}\cos\frac{\alpha}{2} = 2v_{отн}\cos\frac{\alpha}{2}. \quad (1.142)$$

В моменты, когда векторы $v_{\text{пер}}$ и $v_{\text{отн}}$ взаимно перпендикулярны ($\alpha = 90^\circ$), определение абсолютной скорости упрощается. Просто определяется абсолютная скорость и в тех случаях, когда $\alpha = 0^\circ$ (векторы $v_{\text{пер}}$ и $v_{\text{отн}}$ направлены в одну сторону) или $\alpha = 180^\circ$ (векторы $v_{\text{пер}}$ и $v_{\text{отн}}$ направлены в противоположные стороны).

Пример 1.24. Кривошип $OC = 30$ см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 12$ рад/с и приводит в возвратно-поступательное движение кулису AB (рис. 1.136, а) с помощью ползуна, шарнирно соединенного в точке C с кривошипом и передвигающегося в прорези кулисы. Определить скорость v_n ползуна в прорези кулисы и скорость v_k самой кулисы в тот момент, когда кривошип образует с горизонталью угол $\alpha = 30^\circ$.

Решение. 1. Приняв ползун за материальную точку (обозначим ее C), видим, что в данном случае эта точка совершает около неподвижной оси O кривошипа круговое (абсолютное) движение, которое складывается из движения вместе с кулисой (переносное движение) и движения вдоль кулисы (относительное движение).

2. Абсолютная скорость v_C точки C известна (рис. 1.136, б). Она направлена перпендикулярно кривошипу OC (по касательной к круговой траектории точки C) в сторону вращения кривошипа, а ее модуль $v_C = \omega r = 12 \cdot 0,3 = 3,6$ м/с, так как $r = OC = 30$ см $= 0,3$ м.

3. У переносной и относительной скоростей точки C известны только направления. Переносная скорость точки C , равная скорости поступательного движения кулисы, направлена горизонтально (параллельно оси x неподвижной системы координат Oxy). Относительная скорость точки C направлена вдоль кулисы по вертикали AB .

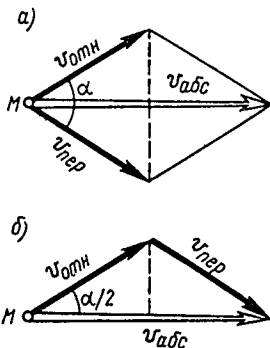


Рис. 1.135

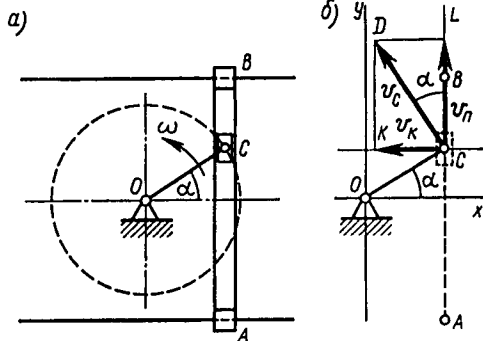


Рис. 1.136

4. Разложив по правилу параллелограмма вектор $\overline{CD} = \mathbf{v}_c$ на два составляющих вектора по горизонтальному и вертикальному направлениям, получим прямоугольник \overline{CKDL} , в котором $\overline{CK} = \mathbf{v}_x$ — искомая скорость кулисы, а $\overline{CL} = \mathbf{v}_n$ — искомая относительная скорость ползуна.

5. Из построения рис. 1.136, б следует, что $\widehat{DCL} = \alpha = 30^\circ$.

Поэтому

$$v_n = v_c \cos \alpha = 3,6 \cos 30^\circ = 3,12 \text{ м/с};$$

$$v_x = v_c \sin \alpha = 3,6 \sin 30^\circ = 1,80 \text{ м/с}.$$

Таким образом, при заданном положении кривошипа относительная скорость ползуна в прорези кулисы направлена вертикально вверх и равна 3,12 м/с, а скорость кулисы направлена горизонтально влево и равна 1,80 м/с.

§ 1.37. Плоскопараллельное движение тела

Движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, называется плоскопараллельными. Если, например, допустить, что асфальтовое покрытие перекрестка двух городских улиц образует идеальную плоскость, то кузова легковых автомобилей, автобусов, троллейбусов, проезжающих через перекресток и делающих правые или левые повороты, совершают плоскопараллельное движение. Такое же движение совершает и колесо, катящееся в вертикальной плоскости.

При плоскопараллельном движении тела M (рис. 1.137) любое его плоское сечение q всегда находится в секущей плоскости xOy , параллельной неподвижной плоскости H , а любая точка A_1 тела M , расположенная выше (или ниже) сечения, движется тождественно с точкой A , лежащей в сечении q на перпендикулярном ему отрезке A_1A . Следовательно, изучая плоскопараллельное движение тела M , достаточно рассматривать движение его плоского сечения q в плоскости xOy .

Совместим плоскость xOy с плоскостью рисун-

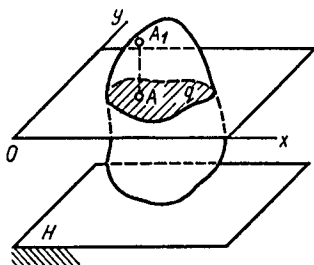


Рис. 1.137

ка и выберем в сечении q (рис. 1.138) произвольную точку A , которую назовем полюсом. Свяжем с полюсом A некоторую прямую KL , а в самом сечении вдоль прямой KL проведем отрезок AB . Пусть теперь, двигаясь в плоскости xOy , плоское сечение переместилось из положения q в положение q_1 , причем полюс A , описав некоторую траекторию AA_1 , занял положение A_1 , а отрезок AB — соответственно положение A_1B_1 . Мы видим, что связанная с полюсом A прямая KL , двигаясь поступательно, заняла положение K_1L_1 , а по отношению к этой прямой отрезок AB повернулся на угол φ против хода часовой стрелки. Иначе говоря, перемещая плоское сечение из положения q в положение q_1 , можно сначала передвинуть его вместе с полюсом A поступательно, а затем повернуть на угол φ либо, наоборот, сначала повернуть вокруг полюса на угол φ , а затем передвинуть поступательно.

Таким образом, плоскопараллельное движение тела — движение сложное и состоит из поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса.

Поступательная часть плоскопараллельного движения характеризуется изменением с течением времени координат x и y полюса A , вращательная часть — изменением угла поворота φ сечения, т. е. закон плоскопараллельного движения можно задать тремя уравнениями:

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t); \quad \varphi=f_3(t). \quad (1.143)$$

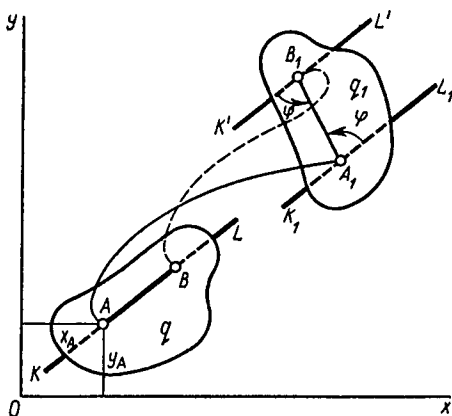


Рис. 1.138

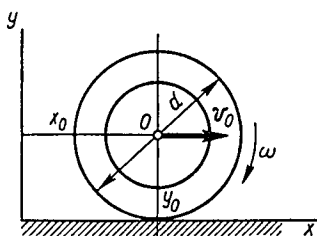


Рис. 1.139

Следует заметить, что первые два уравнения, описывающие поступательную часть плоскопараллельного движения, зависят от выбора полюса, а третье уравнение, описывающее вращательную часть, от выбора полюса не зависит. Действительно, если при перемещении

плоского сечения из положения q в положение q_1 (рис. 1.138) выбрать за полюс точку B , то поступательная часть плоскопараллельного движения характеризуется изменением координат точки B , т. е. иными, чем в уравнении (1.143), двумя первыми уравнениями, а во вращательной части сечение повернется вместе с отрезком AB вокруг полюса B на тот же угол φ и в ту же сторону, что и в первом случае.

Дифференцируя заданные уравнения плоскопараллельного движения, можно в каждый данный момент времени определить скорость v_A и ускорение a_A полюса, а также угловую скорость ω и угловое ускорение ε тела.

Пусть, например, движение катящегося колеса диаметром d (рис. 1.139) задано уравнениями $x_0 = 5t$, $y_0 = d/2$, $\varphi = 20t$, где x_0 и y_0 — м, φ — рад, t — с. Продифференцировав эти уравнения, находим, что скорость полюса O $v_0 = dx_0/dt = 5$ м/с, угловая скорость колеса $\omega = d\varphi/dt = 20$ рад/с. Ускорение полюса и угловое ускорение колеса в данном случае равны нулю. Зная скорость полюса и угловую скорость тела, можно затем определить скорость любой его точки.

§ 1.38. Определение скорости любой точки тела

Пусть дано плоское сечение q , угловая скорость и скорость полюса которого в некоторый момент времени соответственно ω и v_0 (рис. 1.140, а); требуется определить скорость какой-либо точки A .

Расчленим сложное плоскопараллельное движение на составные части — поступательную и вращательную. При поступательном движении вместе с полюсом (переносное движение) все точки сечения, и точка

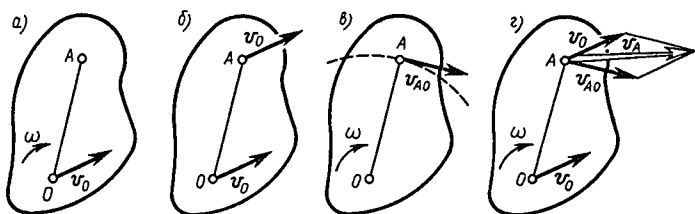


Рис. 1.140

A в том числе, имеют переносную скорость v_O , равную скорости полюса (рис. 1.140, б). Одновременно с поступательным сечение q совершает вращательное движение с угловой скоростью ω (относительно движения) и точка A имеет, кроме того, перпендикулярно направленную к отрезку AO относительную скорость v_{AO} (рис. 1.140, в), модуль которой $v_{AO} = \omega AO$.

Следовательно (рис. 1.140, г), в каждый данный момент времени

$$v_A = v_O + v_{AO}, \quad (1.144)$$

т. е. абсолютная скорость точки тела при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости полюса и относительной скорости этой точки вокруг полюса.

Модуль абсолютной скорости может быть определен по формуле (1.141) (см. § 1.36), а направление — с помощью теоремы синусов. Если же направление абсолютной скорости известно, то ее модуль определяется проще на основании следующей теоремы: проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Допустим, что известны скорости v_A и v_B и точек A и B какого-либо тела (рис. 1.141). Приняв за полюс

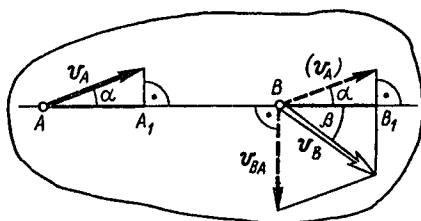


Рис. 1.141

точку A , получим

$$v_B = v_A + v_{BA}.$$

Относительная скорость v_{BA} перпендикулярна AB ; следовательно, $AA_1 = BB_1$ или $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$. Теорема доказана.

§ 1.39. Мгновенный центр скоростей

Точка плоского сечения q , абсолютная скорость которой равняется нулю, называется мгновенным центром скоростей. Иначе говоря, это такая точка C плоского сечения q (рис. 1.142), у которой переносная скорость v_o полюса и относительная скорость v_{co} равны по модулю ($v_o = v_{co} = \omega OC$) и направлены в противоположные стороны. В каждый данный момент такая точка единственная в плоском сечении q , так как она обязательно лежит на прямой MN , перпендикулярной v_o , на расстоянии $OC = v_o/\omega$. Только при этих условиях

$$v_c = v_o - v_{co} = v_o - \omega OC = v_o - \omega v_o/\omega = v_o - v_o = 0.$$

Точка C , у которой абсолютная скорость равна нулю, получила название мгновенного центра скоростей потому, что, во-первых, точка C находится относительно выбранного полюса O в положении, при котором $v_c = 0$ в течение бесконечно малого промежуточного времени («одно мгновение»), и, во-вторых, если точку C принять за полюс, то переносная скорость всех других точек в этот момент равна нулю и их абсолютные скорости равны относительным скоростям вокруг точки C — центра скоростей.

Пусть, например, в плоском сечении q точка C — мгновенный центр скоростей (рис. 1.143), тогда вектор абсолютной скорости любой точки направлен перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с мгновенным центром скоростей, а значение скоростей определяется по формуле (1.127), т. е. $v_A = \omega AC$, $v_B = \omega BC$, $v_D = \omega BD$ и т. д. Отсюда следует простой способ определения положения мгновенного центра скоростей: он лежит на пересечении прямых, перпендикулярных направлениям абсолютных скоростей точек плоского сечения. Значит, для определения положения мгновенного центра скоростей достаточно

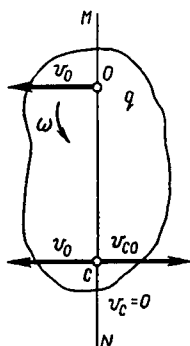


Рис. 1.142

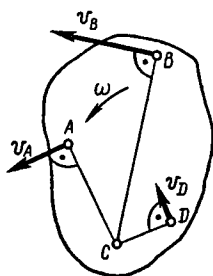


Рис. 1.143

знать лишь направление абсолютных скоростей двух точек плоского сечения.

Этот способ пригоден в случаях, когда направления скоростей не параллельны. Если же в плоском сечении выбраны (или заданы) точки, скорости которых в данный момент параллельны, то здесь возможны два случая:

а) точки A и B расположены на общем перпендикуляре к направлениям скоростей (рис. 1.144, а, б). Тогда для определения положения мгновенного центра скоростей C нужно знать модули скоростей v_A и v_B , а положение точки C определяется из пропорции

$$AC/BC = v_A/v_B,$$

которая вытекает из равенства $v_A/AC = v_B/BC = \omega$, полученного, в свою очередь, из формулы (1.127);

б) точки A и B расположены на прямой, не перпендикулярной направлениям их скоростей (рис. 1.144, в). В подобном случае прямые, перпендикулярные направлениям скоростей точек, параллельны друг

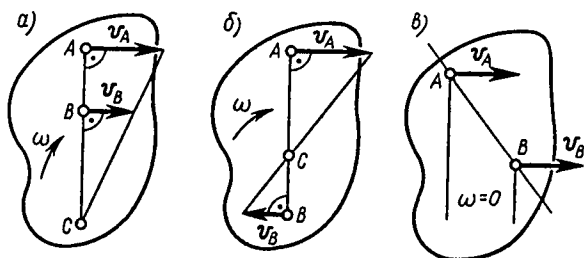


Рис. 1.144

другу. Значит, мгновенный центр скоростей — в бесконечности, т. е. плоское сечение в этот момент движется поступательно и $v_A = v_B$.

В § 1.37 указывалось, что примером плоскопараллельного движения может служить катящееся колесо. Если колесо катится без скольжения (см. рис. 1.139), то в каждый данный момент времени мгновенный центр скоростей плоского сечения колеса, перпендикулярного его оси O , лежит в точке соприкосновения колеса с неподвижной плоскостью.

§ 1.40. Сложение двух вращательных движений

Сложение двух вращений вокруг параллельных осей рассмотрим на примере диска 1 (рис. 1.145, a), вращающегося около оси O_1a , закрепленной на кривошипе 2 , который, в свою очередь, вращается около оси O_2b ($O_2b \parallel O_1a$).

Допустим, что диск 1 и кривошип 2 вращаются в одну сторону с угловыми скоростями соответственно ω_1 и ω_2 . Изобразим угловые скорости диска и кривошипа в виде векторов $AA_1 = \omega_1$ и $BB_1 = \omega_2$, направленных соответственно вдоль осей O_1a и O_2b (см. § 1.32). Таким образом, диск 1 участвует одновременно в двух вращательных движениях: во-первых, вокруг оси O_1a с угловой скоростью ω_1 (относительное вращение) и, во-вторых, вместе с кривошипом 2 вокруг оси O_2b с угловой скоростью ω_2 (переносное движение). В каждый данный момент времени точка B диска, оказывающаяся на оси O_2b , имеет от первого движения скорость v_B , направленную перпендикулярно AB и численно равную $v_B = \omega_1 AB$ (во втором движении эта точка неподвижна); в тот же момент точка A , неподвижная в первом движении, за счет второго движения получает скорость v_A , направленную также перпендикулярно отрезку AB , но численно равную $v_A = \omega_2 BA$. Следовательно, скорости v_B и v_A — абсолютные скорости точек A и B диска в сложном вращательном движении и параллельны друг другу. Согласно правилу, показанному на рис. 1.145, a , найдем положение точки C — мгновенного центра скоростей диска, через которую проходит мгновенная ось Cc вращения диска. Считая, что около мгновенной оси

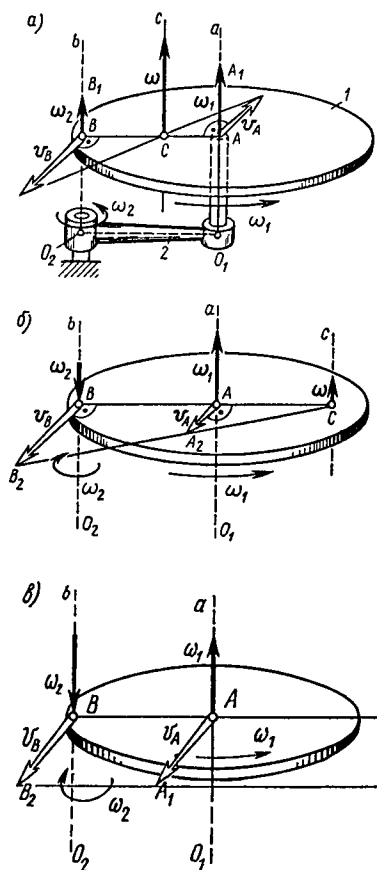


Рис. 1.145

Сс диск вращается с угловой скоростью ω , можем записать

$$v_B = \omega CB \text{ и } v_A = \omega CA,$$

откуда

$$\omega = \frac{v_B}{CB} = \frac{v_A}{CA}. \quad (\text{а})$$

Из свойств пропорции

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{CB + CA} = \frac{v_B + v_A}{AB}.$$

Подставляя сюда значения v_B и v_A , найденные выше, получим

$$\omega = \frac{\omega_1 AB + \omega_2 AB}{AB}.$$

И окончательно

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (1.145)$$

Следовательно, при сложении двух направленных в одну сторону вращательных движений вокруг параллельных осей образуется вращение вокруг мгновенной оси с абсолютной угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей первого и второго вращений.

Положение мгновенной оси Cc определяется из равенства

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC}, \quad (1.146)$$

которое можно получить из выражения (а), если разделить каждую его часть на AB .

Если диск 1 и кривошип 2 вращаются в противоположные стороны (рис. 1.145, б), то v_B — скорость точки B , получившаяся при вращении диска 1, и v_A — скорость точки A , получившаяся при вращении кривошипа 2, направленные перпендикулярно отрезку AB в одну сторону. Поэтому мгновенный центр скоростей C лежит на продолжении отрезка BA за большей по модулю угловой скоростью ω_1 . Теперь абсолютная угловая скорость

$$\omega = \frac{v_B}{CB} = \frac{v_A}{CA} = \frac{v_B - v_A}{AB}.$$

Подставив вместо скоростей точек B и A их значения $v_B = \omega_1 AB$ и $v_A = \omega_2 AB$, получим

$$\omega = \frac{\omega_1 AB - \omega_2 AB}{AB},$$

т. е.

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (1.147)$$

— при сложении направленных в противоположные стороны двух вращательных движений вокруг параллельных осей также образуется вращение около мгновенной оси, но с абсолютной скоростью, равной

разности угловых скоростей первого и второго вращений.

Положение мгновенной оси Cc определяется по формуле (1.146).

Интересен частный случай, когда $\omega_1 = -\omega_2$, т. е. диск 1 и кривошип 2 вращаются с одинаковой угловой скоростью, но в противоположные стороны (рис. 1.145, в). В этом случае векторы угловых скоростей образуют пару векторов (мгновенная ось — в бесконечности) и в каждый следующий момент времени скорости всех точек диска равны между собой. Следовательно, пока сохраняется равенство $\omega_1 = -\omega_2$, движение диска поступательное.

Сложение двух вращательных движений вокруг пересекающихся осей рассмотрим на примере вращения тела 1 вокруг оси O_1a (рис. 1.146), закрепленной на кривошипе 2, который вращается вокруг оси O_2b , причем обе оси лежат в одной плоскости и, следовательно, пересекаются в какой-либо точке C .

Предположим, что тело 1 вращается вокруг оси O_1a с угловой скоростью ω_1 (относительное движение), а вместе с кривошипом 2 — вокруг оси O_2b с угловой скоростью ω_2 (переносное движение). Перенесем векторы угловых скоростей ω_1 и ω_2 вдоль осей в точку C их пересечения, а затем, сложив по правилу параллелограмма, получим

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (1.148)$$

Вектор ω абсолютной угловой скорости направлен вдоль проходящей через точку C пересечения осей O_1a и O_2b прямой Oc , которая и является мгновенной осью вращения тела в результирующем вращении.

Итак, при сложении двух вращательных движений вокруг пересекающихся осей абсолютная угловая скорость тела равна геометрической сумме угловых скоростей в первом относительном и втором переносном движении.

Пример 1.25. Горизонтальная ось OO_1 бегуна вращается равномерно вокруг вертикальной оси Oz с частотой $n = 120$ об/мин, а сам бегун при этом катится без скольжения по горизонтальной

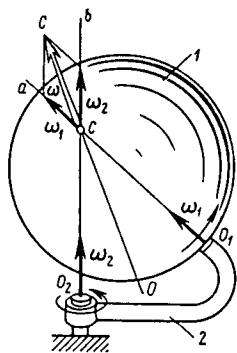


Рис. 1.146

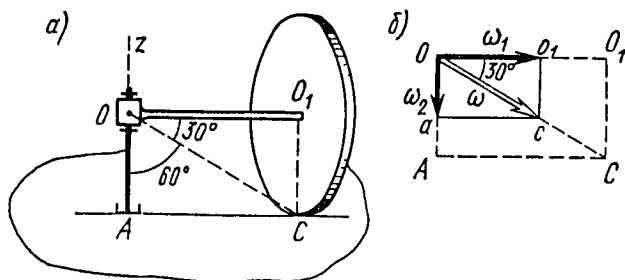


Рис. 1.147

плоскости (рис. 1.147, а). Определить угловую скорость ω_2 бегуна в его переносном движении вокруг оси Oz , относительную угловую скорость ω_1 бегуна вокруг собственной оси OO_1 и абсолютную угловую скорость ω бегуна при условии, что прямая OC образует с горизонтальной осью угол 30° .

Решение. 1. Бегун катится по плоскости в направлении хода часовой стрелки, если смотреть на него сверху. Следовательно, вектор угловой скорости ω_2 направлен вдоль оси Oz вниз. При качении по плоскости бегун вращается вокруг оси OO_1 с угловой скоростью, вектор которой ω_1 направлен от O к O_1 . Бегун катится по плоскости без скольжения, значит мгновенная ось результирующего вращения в каждый данный момент времени совпадает с линией, проходящей через точки O и C (мгновенный центр скоростей бегуна), и диагональ параллелограмма, построенного на векторах ω_1 и ω_2 , также совпадает с отрезком OC (рис. 1.147, б).

2. Частота вращения оси OO_1 бегуна $n = 120$ об/мин, следовательно, угловая скорость бегуна в переносном движении

$$\omega_2 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 120}{30} = 4\pi \text{ рад/с.}$$

3. Из векторного прямоугольника (рис. 1.147, б) находим угловую скорость бегуна в относительном движении:

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{\tan 30^\circ} = \frac{4\pi}{1/\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\pi = 6,92\pi \text{ рад/с.}$$

4. Абсолютная угловая скорость бегуна

$$\omega = \frac{\omega_2}{\sin 30^\circ} = 2\omega_2 = 8\pi \text{ рад/с.}$$

§ 1.41. Понятие о планетарных передачах. Формула Виллиса

Сложение вращательных движений наблюдается в широко применяемых планетарных передачах. Любая планетарная передача состоит из трех групп элемен-

тов: центральных колес, колес сателлитов и водил. На рис. 1.148 показаны простейшие планетарные передачи, состоящие из водила h , одного центрального колеса 1 и одного сателлита 2 . Центральные колеса располагаются на неподвижных осях, на этих же осях располагаются водила, несущие оси сателлитов. Сателлиты относительно неподвижной системы отсчета совершают сложное вращательное движение — они вращаются около оси, закрепленной на водиле (относительное движение), и одновременно вместе с водилом вращаются вокруг центральных колес (переносное движение). Движение сателлитов, напоминающее движение планет вокруг Солнца, и определило название таких передач.

В общем случае центральное колесо и водило могут получать вращение от двух независимых источников. Такая планетарная передача имеет две степени свободы и называется *дифференциальной* (рис. 1.148, $a, б$). Если закрепить центральное колесо, то получим передачу с одной степенью свободы — движение можно передавать либо от водила к сателлиту, либо от сателлита к водилу; такая передача называется *простой планетарной* (рис. 1.148, $в, г$).

Введем следующие обозначения угловых скоростей элементов планетарных передач: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ — угловые скорости зубчатых колес (центральных или сателлитов) дифференциальных передач; ω_h —

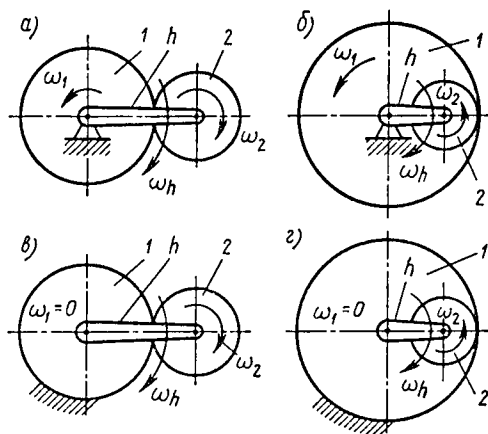


Рис. 1.148

угловая скорость водила в дифференциальной передаче; угловые скорости колеса или водила простой планетарной передачи обозначаются теми же буквами, но с верхними индексами, соответствующими номеру закрепленного центрального колеса ($\omega_2^{(1)}$ — угловая скорость второго колеса при закрепленном первом, $\omega_h^{(1)}$ — угловая скорость водила при закрепленном первом колесе).

Аналогично обозначаются и передаточные отношения: u_{1h} — передаточное отношение от колеса 1 к водилу в дифференциальной передаче; $u_{1h}^{(2)}$ — передаточное отношение от колеса 1 к водилу при неподвижном втором колесе; $u_{12}^{(h)}$, $u_{1n}^{(h)}$ — передаточные отношения от колеса 1 к колесу 2 или от колеса 1 к колесу n при неподвижном водиле.

При определении передаточных отношений планетарных передач можно использовать **метод остановки водила**. Рассмотрим этот метод на примере дифференциальной передачи (рис. 1.148, а). Пусть в какой-то момент времени угловые скорости колеса 1 — ω_1 , сателлита 2 — ω_2 и водила — ω_h (рис. 1.149, а). Теперь представим, что вся система получила угловую скорость $-\omega_h$, т. е. численно равную скорости водила, но направленную в обратную сторону по отношению к действительному вращению водила (рис. 1.149, б), тогда для неподвижного наблюдателя угловая скорость водила станет равной нулю, а угловые скорости центрального колеса и сателлита соответственно получат значения $\omega_1 - \omega_h$ и $\omega_2 - \omega_h$.

Таким образом, при остановленном водиле получилась обычная зубчатая передача, для которой передаточное отношение от колеса 1 к колесу 2

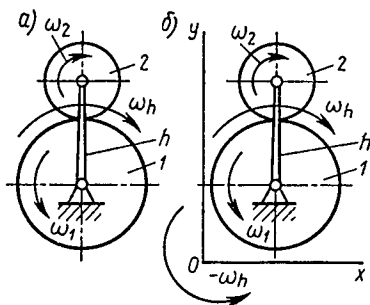


Рис. 1.149

$$u_{12}^{(h)} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h},$$

где в данном случае

$$u_{12}^{(h)} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

Полученное выражение называется *формулой Виллиса*.

Общий вид формулы Виллиса дифференциальной передачи с любым числом центральных колес и сателлитов

$$u_{1n}^{(h)} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_n - \omega_h}, \quad (1.149)$$

где передаточное отношение $u_{1n}^{(h)}$ определяется по формуле (1.137).

Аналогично, в простой планетарной передаче при неподвижном центральном колесе 2 ($\omega_2 = 0$) действительная угловая скорость колеса 1 $\omega_1^{(2)}$ и водила $\omega_h^{(2)}$ (рис. 1.150, а). Если сообщить всей системе угловую скорость $-\omega_h^{(2)}$ (рис. 1.150, б), то скорость водила станет равной $\omega_h^{(2)} - \omega_h^{(2)} = 0$, а скорости колес 1 и 2 получат значения соответственно

$$\omega_1^{(2)} - \omega_h^{(2)} \text{ и } -\omega_h^{(2)}.$$

Отсюда передаточное отношение от колеса 1 к колесу 2 при остановленном водиле

$$u_{12}^{(h)} = \frac{\omega_1^{(2)} - \omega_h^{(2)}}{-\omega_h^{(2)}} = -\frac{\omega_1^{(2)}}{\omega_h^{(2)}} + 1 = 1 - u_{1h}^{(2)}.$$

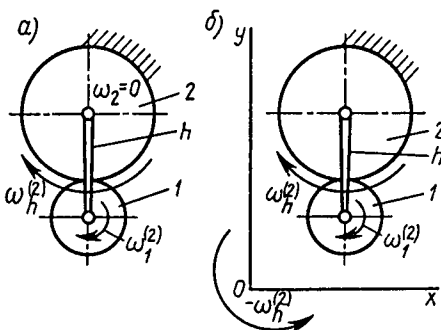


Рис. 1.150

Следовательно, при закрепленном колесе 2 передаточное отношение от колеса 1 к водилу

$$u_{1h}^{(2)} = 1 - u_{12}^{(h)},$$

где в данном случае $u_{12}^{(h)} = \pm z_2/z_1$.

Общий вид формулы Виллиса простой планетарной передачи при любом числе колес

$$u_{1h}^n = 1 - u_{1n}^{(h)}. \quad (1.150)$$

Передаточное отношение $u_{1n}^{(h)}$, как и в предыдущем случае, определяется по формуле (1.137).

Вопросы для самопроверки

1. По рельсам кран-балки движется тележка с лебедкой, а последняя одновременно поднимает деталь. Какое движение детали относительное, какое переносное и какое абсолютное?

2. Тело находится в плоскопараллельном движении; может ли у какой-либо точки тела абсолютная скорость равняться нулю?

3. Тело участвует одновременно в двух вращательных движениях; угловая скорость переносного вращения $\omega_1 = 40$ рад/с, а угловая скорость относительного $\omega_2 = 30$ рад/с. Найдите угловую скорость результирующего вращательного движения, если: а) переносное и относительное вращения происходят вокруг параллельных осей в одну сторону или в противоположные стороны; б) переносное и относительное вращения происходят вокруг осей, пересекающихся под прямым углом?

ДИНАМИКА

ГЛАВА 10. ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1.42. Основные понятия и аксиомы

Заключительный раздел теоретической механики — динамика — изучает движение материальных тел под действием сил. Узнав из кинематики, как могут двигаться материальные точки и твердые тела и как может с течением времени изменяться характер их движения, при изучении динамики узнаем, почему материальные точки (тела) движутся именно так, а не иначе и какие причины приводят к изменению их движения.

В основе динамики лежат следующие аксиомы.

Аксиома 1 (принцип инерции). *Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.* Это знакомая нам первая аксиома статики (см. § 1.2). Принцип инерции лежит в основе статики и динамики потому, что содержит в себе как аксиому инерции покоя (статика), так и аксиому инерции движения (динамика). Таким образом, если на материальное тело (точку) не действуют никакие силы или действует уравновешенная система сил $\sum \mathbf{F}_k = 0$ и $\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = 0$, то относительно неподвижной системы отсчета скорость тела (точки) $\mathbf{v} = \text{const}$. Но при $\mathbf{v} = 0$ имеем состояние покоя, иначе состояние статического равновесия, а при $\mathbf{v} \neq 0$ (точка движется равномерно-прямолинейно) — состояние динамического равновесия.

Условно принимаемая за неподвижную система отсчета, относительно которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной*. Обычно при решении технических задач за инерциальную принимают систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Из первой аксиомы следует, что вывести материальную точку из состояния инерции может только приложенная сила, но из кинематики известно, что начало движения материальной точки из состояния покоя либо нарушение ее прямолинейного или равномерного движения связано с возникновением ускорения. Зависимость между внешней силой, действующей на материальную точку, и возникшим вследствие этого ускорением устанавливает аксиома 2.

Аксиома 2 (основной закон динамики). *Ускорение a материальной точки пропорционально действующей силе F и направлено по той прямой, по которой действует эта сила* (рис. 1.151). Математически вторая аксиома записывается векторным равенством

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (1.151)$$

где коэффициент пропорциональности m выражает меру инертности материальной точки и называется ее *массой*. В Международной системе единиц (СИ) масса выражается в килограммах.

Зависимость между числовыми значениями (модулями) сил и ускорения выражается равенством

$$F = ma. \quad (1.152)$$

На все материальные тела вблизи Земли действует сила тяжести G и при свободном падении на Землю тела любой массы m приобретают одно и то же ускорение g , которое называется ускорением свободного падения. Для свободно падающего тела из уравнения (1.152) следует зависимость

$$G = mg. \quad (1.153)$$

Таким образом, значение силы тяжести тела в ньютонх равно произведению его массы на ускорение свободного падения.

Значение g зависит от географической широты местности и высоты над уровнем моря. В среднем $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, а для приближенных расчетов можно принимать $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Аксиома 3 (закон независимости действия сил). *Если к материальной точке приложена система сил, то каждая из сил системы сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщила бы, действуя одна.*



Рис. 1.151

Таким образом, при одновременном действии на материальную точку массой m , например, четырех сил (рис. 1.152) ускорение a , полученное точкой, можно определить, геометрически сложив ускорения a_1 , a_2 , a_3 и a_4 , возникшие под действием каждой силы в отдельности. В то же время ускорение a пропорционально равнодействующей F_Σ тех же сил:

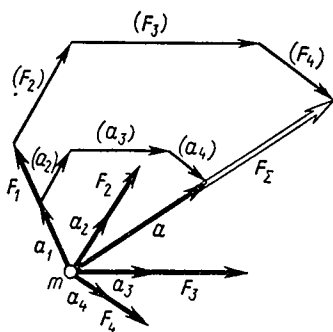


Рис. 1.152

$$F_\Sigma = ma, \quad (1.154)$$

где $F_\Sigma = \sum F_k$ и $a = \sum a_k$.

Аксиома 4—это известная из статики (см. § 1.2) аксиома 5 (закон равенства действия и противодействия), которую применительно к материальным точкам сформулируем так: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны.*

Четвертая аксиома в динамике имеет важное значение. Следует ясно представить себе, что силы взаимодействия между двумя материальными точками не уравнивают друг друга, так как одна сила приложена к одной точке, а вторая—к другой. Согласно аксиоме 2, каждая из этих сил сообщает ускорение той материальной точке, на которую действует. Таким образом, все ускорения материальных точек относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета есть результат взаимодействия материальных точек, а в общем случае—результат взаимодействия материальных тел.

С помощью изложенных выше четырех аксиом и решаются все задачи динамики материальной точки, а также задачи динамики системы материальных точек, в частности динамики твердого тела.

§ 1.43. Свободная и несвободная точки

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-либо связями, называется свободной. Примером свободной материальной точки может служить искусственный спутник Земли в околоземном пространстве или летящий самолет. Их перемещение в пространстве ничем не ограничено, и, в частности, поэтому летчик на спортивном самолете способен проделывать различные сложные фигуры высшего пилотажа. Для свободной материальной точки задачи динамики сводятся к двум основным: 1) задается закон движения точки, требуется определить действующую на нее силу или систему сил (первая задача динамики); 2) задается система сил, действующая на точку, требуется определить закон движения (вторая задача динамики). Обе задачи динамики решаются с помощью основного закона динамики, записанного в форме (1.151) или (1.154).

Материальная точка, свобода перемещения которой ограничена наложенными связями, называется несвободной. Примером несвободной материальной точки может служить движущийся по рельсам трамвай (если пренебречь его формой и размерами). Для несвободной материальной точки все внешние силы необходимо делить на две категории: 1) активные (движущие) силы и 2) реакции связей (пассивные силы). В связи с этим первая задача динамики несвободной точки сводится к определению реакций связей, если заданы закон движения точки и действующие на нее активные силы; вторая задача динамики сводится к тому, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить, во-первых, закон движения точки и, во-вторых, реакции связей.

Если несвободную материальную точку освободить от связей и заменить связи их реакциями, то движение точки можно рассматривать как свободное, а основному закону динамики придать такой вид:

$$\sum \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{R}_k = m\mathbf{a}, \quad (1.155)$$

где \mathbf{F}_k — активные силы; \mathbf{R}_k — реакции связей; m — масса точки и \mathbf{a} — ускорение точки, полученное в результате действия всех внешних сил (активных и пассивных).

§ 1.44. Силы инерции

Сила, численно равная произведению массы материальной точки на приобретенное ею ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению, называется силой инерции. Иначе говоря (рис. 1.153), сила инерции

$$F_{\text{ин}} = -ma. \quad (1.156)$$

Сила инерции в действительности не приложена к получившей ускорение материальной точке, а действует на точку или тело, которое сообщает ускорение этой точке.

Поясним это несколькими примерами.

Тяжелый груз, масса которого m , висит на непрочной нити, но способной выдержать натяжение $R=G$ (рис. 1.154, а); если теперь резко потянуть нить вертикально вверх, то нить может оборваться (рис. 1.154, б). В этом случае натяжение нити, численно равное ее реакции R , увеличивается, так как помимо силы тяжести груза $G=mg$ на нить начинает действовать дополнительная сила инерции $F_{\text{ин}}$, численно равная ma (рис. 1.154, в), выражающая противодействие груза выходу его из состояния инерции. Нить может оборваться и в том случае, если толкнуть в горизонтальном направлении подвешенный груз (рис. 1.154, г), заставив его раскачиваться на нити.

При криволинейном движении материальной точки у нее возникает ускорение a , которое обычно (см. § 1.28) заменяют двумя составляющими

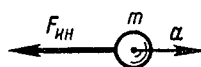


Рис. 1.153

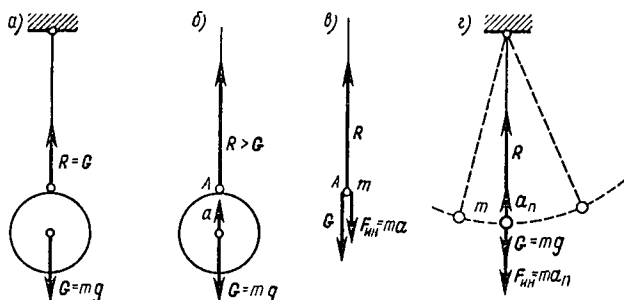


Рис. 1.154

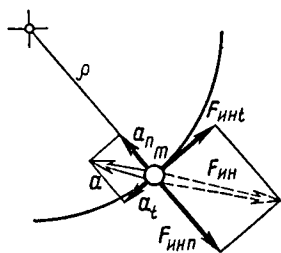


Рис. 1.155

ускорениями: a_n (нормальное ускорение) и a_t (касательное ускорение). Поэтому при криволинейном движении материальной точки возникают две составляющие силы инерции $F_{ин}$ (рис. 1.155): нормальная (иначе центробежная) сила инерции

$$F_{инн} = -ma_n \quad (1.157)$$

и касательная (иначе тангенциальная) сила инерции

$$F_{инт} = -ma_t. \quad (1.158)$$

В дальнейшем с нормальной силой инерции будем часто встречаться в ходе решения задач.

Так как значение нормального ускорения определяется формулами (1.87) или (1.129), значение нормальной силы инерции определяют по формулам

$$F_{инн} = \frac{mv^2}{\rho}, \quad (1.159)$$

или

$$F_{инн} = m\omega^2\rho. \quad (1.160)$$

Рассмотрим еще один пример. Всем известно явление, когда при резком трогании с места автобуса или вагона метро пассажиры отклоняются назад по ходу движения и, наоборот, при резком торможении отклоняются вперед. Объясним это явление на примере чемоданов *А* и *Б*, «спокойно» лежащих на двух противоположных полках купе вагона (рис. 1.156, *а*) до тех пор, пока вагон пребывает в состоянии инерции (в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения). Если же вагон получил ускорение a , направленное вправо, то правый чемодан *Б*

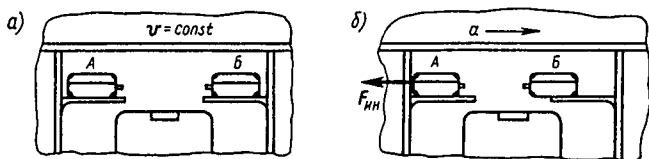


Рис. 1.156

может упасть с полки (рис. 1.156, б), так как из-за инерции чемодана полка вагона, получившая вместе с вагоном ускорение a , «выскользнет» из-под чемодана. Чемодану A мешает упасть стенка вагона, и чемодан A начинает давить на нее с силой инерции $F_{ин} = -ma$.

§ 1.45. Принцип Даламбера

Силы инерции широко используются при расчетах и решении многих технических задач, причем использование сил инерции позволяет свести к знакомым нам уравнениям статики решения многих задач, в которых рассматривается движение несвободной материальной точки.

Перепишав векторное уравнение (1.155) для несвободной материальной точки (см. § 1.43):

$$\sum \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{R}_k + (-m\mathbf{a}) = 0,$$

видим, что $-m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ин}$ — сила инерции. Поэтому равенству (1.155) может быть придан вид

$$\sum \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{R}_k + \mathbf{F}_{ин} = 0. \quad (1.161)$$

Прикладывая условно силу инерции $\mathbf{F}_{ин}$ к движущейся материальной точке, можем считать, что *активные силы \mathbf{F}_k , реакции связей \mathbf{R}_k и сила инерции $\mathbf{F}_{ин}$ образуют уравновешенную систему (принцип Даламбера).*

Решение задач динамики с помощью принципа Даламбера иногда называют **методом кинетостатики**. Познакомимся с ним на конкретном примере.

Пример 1.26. Шарик A массой $m=0,2$ кг на нити AB длиной $l=0,5$ м (рис. 1.157, а) вращается равномерно в горизонтальной плоскости так, что нить образует коническую поверхность, наклоненную к горизонту под углом $\alpha=30^\circ$. Определить натяжение нити и скорость шарика.

Решение. 1. Материальная точка A движется равномерно по

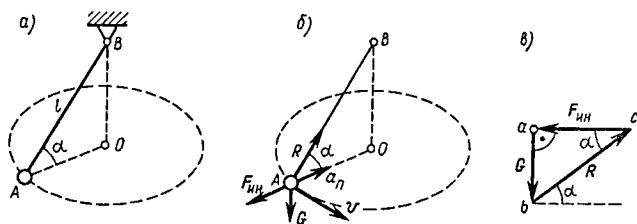


Рис. 1.157

окружности радиуса $AO = r = l \cos \alpha$; следовательно, ускорение a_n точки направлено от A к O (рис. 1.157, б).

2. На точку A действуют: активная сила тяжести $G = mg$, направленная вертикально вниз, и реакция нити R , направленная вдоль нити от A к B .

3. Добавим к этим силам силу инерции $F_{ин}$, направив ее по OA в сторону, противоположную ускорению a_n . Тогда, согласно принципу Даламбера,

$$G + R + F_{ин} = 0,$$

т. е. при любом положении точки A на траектории эти три силы образуют замкнутый $\triangle abc$ (рис. 1.157, в), где $\overline{ab} = G$, $\overline{bc} = R$ и $\overline{ca} = F_{ин}$, $\hat{bac} = 90^\circ$, $\hat{acb} = \alpha = 30^\circ$.

4. Из $\triangle abc$ находим

$$R = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \alpha} = \frac{0,2 \cdot 9,8}{\sin 30^\circ} \text{ Н} = 3,92 \text{ Н};$$

$$F_{ин} = \frac{G}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{mg}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{0,2 \cdot 9,8}{\operatorname{tg} 30^\circ} \text{ Н} = 3,4 \text{ Н}.$$

Из формулы $F_{ин} = \frac{mv^2}{\rho}$, имея в виду, что $\rho = r = l \cos \alpha$, находим скорость точки

$$v = \sqrt{\frac{F_{ин} l \cos \alpha}{m}} = \sqrt{\frac{3,4 \cdot 0,5 \cdot \cos 30^\circ}{0,2}} = 2,72 \text{ м/с}.$$

5. Таким образом, нить натянута с силой 3,92 Н и скорость движения точки 2,72 м/с.

Вопросы для самопроверки

1. Мы наблюдаем тело, движущееся равномерно и прямолинейно. Какое заключение можно сделать о системе действующих на тело сил?

2. Двум учащимся предложили найти ускорение точки массой m , на которую в различных направлениях действуют силы. Один из учащихся сначала нашел равнодействующую приложенных к точке сил, а затем, используя второй закон динамики, определил ускорение точки. Второй — сначала нашел ускорения, приобретенные точкой от действия каждой из сил, а затем геометрически сложил эти ускорения. Какой из учащихся выбрал для решения задачи правильный путь?

3. Два человека растягивают динамометр и он показывает 400 Н. С какой силой тянет к себе динамометр каждый человек?

4. Человек передвигает по снегу тяжело нагруженные санки. Согласно четвертой аксиоме, сила человека и противодействие санок, приложенные к веревке, уравнивают друг друга. Как же человеку удастся двигать санки?

5. Возникает ли сила инерции при равномерном криволинейном движении точки?

6. Человек вращает привязанный к нити грузик. Что безопаснее для нити — увеличить ее длину в два раза (при той же скорости вращения) или при неизменной длине нити в два раза увеличить скорость вращения?

ГЛАВА 11. РАБОТА И МОЩНОСТЬ

§ 1.46. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении

Если при действии постоянной силы F на точку M ее перемещение $\overline{M_0 M_1} = s$ (рис. 1.158), то *скалярная мера действия силы называется работой* и определяется по формуле

$$W = F s \cos \alpha, \quad (1.162)$$

где α — угол между направлением действия силы и направлением перемещения. В СИ работа выражается в джоулях:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2.$$

Так как джоуль — единица сравнительно небольшая, часто используют кратные единицы: килоджоуль ($1 \text{ кДж} = 10^3 \text{ Дж}$) или мегаджоуль ($1 \text{ МДж} = 10^6 \text{ Дж}$).

Из формулы (1.162) видно, что работа — величина алгебраическая. При изменении угла α в пределах $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ значение $\cos \alpha > 0$. Поэтому если угол α — острый, то работа силы F — положительная. В частном случае, когда направление действия силы совпадает с направлением перемещений ($\alpha = 0$), $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$ и

$$W = F s. \quad (1.163)$$

При изменении угла α в пределах $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ значение $\cos \alpha < 0$. Следовательно, если угол α — тупой, то работа силы F — отрицательная. В частном случае при $\alpha = 180^\circ$ $\cos \alpha = \cos 180^\circ = -1$ и

$$W = -F s. \quad (1.164)$$

Если работа силы положительна ($W > 0$), то сила называется движущей, а если — отрицательна ($W < 0$), то — силой сопротивления.

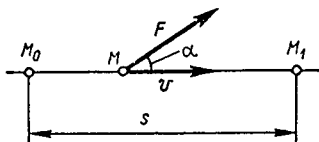


Рис. 1.158

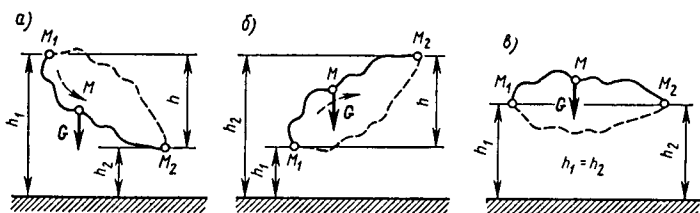


Рис. 1.159

Заметим, что при $\alpha = 90^\circ$ значение $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$ и $W = 0$, т. е. *работа силы, направленной перпендикулярно перемещению точки, равна нулю.*

Рассмотренные выше три частных случая значений работы силы при $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ аналогичны значениям работы силы тяжести. Как известно из физики, работа силы тяжести не зависит от траектории движения точки и всегда равна произведению силы тяжести на разность высот в исходном и конечном положениях. Если точка M перемещается из положения M_1 в положение M_2 , то при любой траектории точки работа силы тяжести

$$W = Gh = G(h_1 - h_2), \quad (1.165)$$

где h_1 — начальная высота точки над заданным уровнем на Земле, а h_2 — конечная высота над тем же уровнем.

При движении точки вниз (рис. 1.159, а) работа силы тяжести положительна, так как $h_1 > h_2$ и $h = h_1 - h_2 > 0$. В этом случае сила тяжести действует как движущая сила.

При движении точки вверх (рис. 1.159, б) работа силы тяжести отрицательна, так как теперь $h_1 < h_2$ и $h = h_1 - h_2 < 0$. В этом случае сила тяжести действует как сила сопротивления.

При движении точки из начального и конечного положений (рис. 1.159, в), находящихся на одном уровне ($h = h_1 - h_2 = 0$), работа силы тяжести равна нулю. Этот случай аналогичен перемещению точки по направлению, перпендикулярному действию силы.

§ 1.47. Работа равнодействующей силы

Если на точку действует одновременно несколько сил, то алгебраическая сумма их работ равна работе равнодействующей силы.

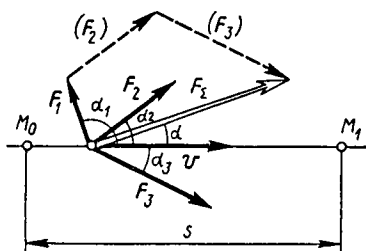


Рис. 1.160

Допустим, что перемещение точки $\overline{M_0 M_1} = s$ произошло при действии на нее трех сил: F_1 , F_2 и F_3 (рис. 1.160). Тогда, обозначив работу каждой из сил соответственно W_1 , W_2 и W_3 , можем записать $W_1 = F_1 \cos \alpha_1 \cdot s$, $W_2 = F_2 \cos \alpha_2 \cdot s$ и $W_3 = F_3 \cos \alpha_3 \cdot s$.

Сложив правые и левые части этих равенств, получим

$$W_1 + W_2 + W_3 = (F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3) s.$$

Известно (см. § 1.6), что сумма проекций сил на некоторую ось равна проекции равнодействующей этих сил на ту же ось (в данном случае на ось, проходящую через точки M_0 и M_1). Следовательно,

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 = F_{\Sigma} \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$W_1 + W_2 + W_3 = F_{\Sigma} \cos \alpha s.$$

Так как $F_{\Sigma} \cos \alpha \cdot s = W_{\Sigma}$ и есть работа равнодействующей силы $F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3$, то

$$W_1 + W_2 + W_3 = W_{\Sigma}$$

или в общем случае для любого числа сил

$$\sum W_k = W_{\Sigma}. \quad (1.166)$$

При равномерном прямолинейном движении точки приложенная к ней система сил уравновешена (первая аксиома динамики), т. е. $F_{\Sigma} = 0$, и тогда

$$\sum W_k = 0 \quad (1.167)$$

— алгебраическая сумма работ уравновешенной системы сил, приложенных к точке, равна нулю.

§ 1.48. Работа переменной силы на криволинейном пути

Чтобы определить работу непостоянной силы F при перемещении точки M по криволинейной траектории из положения M_0 в положение M_1 (рис. 1.161, а), поступим следующим образом. Дугу M_0M_1 траектории разделим на множество частей ds настолько малых, что каждую из них можно считать отрезком прямой. Тогда по формуле (1.162) работа силы F на перемещении ds , так называемая элементарная работа,

$$dW = F \cos \alpha ds. \quad (1.168)$$

Просуммировав все элементарные работы переменной силы F , получим ее работу на участке траектории от M_0 до M_1 :

$$W = \int_{M_0}^{M_1} F \cos \alpha ds. \quad (1.169)$$

Разложив силу F на составляющие F_n и F_t (рис. 1.161, б), направленные соответственно по нормали и касательной, увидим, что работа нормальной составляющей равняется нулю и, следовательно, в формуле (1.169) произведение $F \cos \alpha$ выражает модуль касательной составляющей силы F , т. е. $F_t = F \cos \alpha$, и формуле (1.169) можем придать вид

$$W = \int_{M_0}^{M_1} F_t ds. \quad (1.170)$$

Интегралы в формулах (1.169) и (1.170) могут быть определены лишь в том случае, если известен закон движения точки. Иначе говоря, если задана переменная сила, то предварительно необходимо определить закон движения точки, а уже потом находить работу силы.

В тех случаях, когда известна зависимость между касательной составляющей F_t и перемещением s точки приложения силы, работа может быть определена графическим способом.

Отложив по оси абсцисс расстояния точки от некоторого начального положения s_0 , а по оси ординат — соответствующие этим расстояниям значения F_t (рис. 1.162), получим график работы силы F :

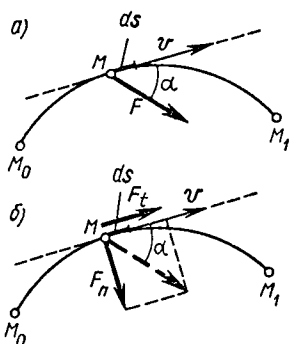


Рис. 1.161

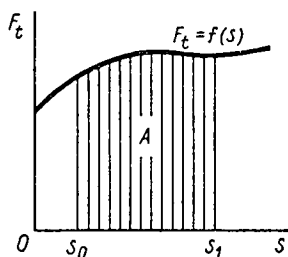


Рис. 1.162

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F_t ds, \quad (1.171)$$

изображаемый заштрихованной площадью.

Известно, например, что при растяжении пружины (рис. 1.163, а, б) модуль силы изменяется пропорционально ее удлинению, т. е.

$$F = C \Delta l, \quad (1.172)$$

где коэффициент пропорциональности C называется жесткостью пружины и выражается в Н/м, Н/см или Н/мм. Эта зависимость графически выражается отрезком прямой, проходящей через начало осей координат $(\Delta l, F)$ (рис. 1.163, в), и тогда с учетом масштабов по осям при растяжении пружины на Δl работа силы F

$$W = F \Delta l / 2. \quad (1.173)$$

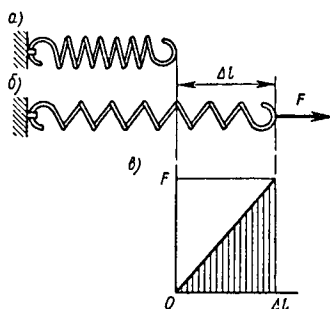


Рис. 1.163

Если заменить по формуле (1.172) Δl на F/C , то получим

$$W = F^2 / (2C). \quad (1.174)$$

§ 1.49. Мощность

Скалярная величина

$$P = W/t, \quad (1.175)$$

характеризующая *быстроту совершения работы*, называется **средней мощностью силы**.

В СИ мощность выражается в ваттах:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2}{1 \text{ с}} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}.$$

Часто употребляются кратные единицы — киловатт ($1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$) и мегаватт ($1 \text{ МВт} = 10^6 \text{ Вт}$).

Подставив в формулу (1.175) значение работы из формулы (1.162), получим

$$P = F \cos \alpha \cdot s/t = F \cos \alpha \cdot v. \quad (1.176)$$

Формула (1.175) выражает среднюю мощность силы ($P_{\text{ср}}$) за некоторый промежуток времени $t = t_1 - t_2$ и тогда в формуле (1.176) $s/t = v_{\text{ср}}$ — средняя скорость точки. Если с течением времени сила сохраняла постоянное значение, то средняя мощность $P_{\text{ср}} = P = \text{const}$.

По формуле (1.176) можно определить мощность переменной силы в любой момент времени, если в этот момент известны значения $F_t = F \cos \alpha$ и $v = ds/dt$.

Если в течение некоторого времени t мощность машины остается постоянной (или существенно не изменяется), то произведенная работа выражается формулой

$$W = Pt. \quad (1.177)$$

Отсюда появилась и получила широкое распространение единица работы киловатт-час:

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 1 \text{ кВт} \cdot 1 \text{ ч} = 10^3 \text{ Вт} \cdot 3600 \text{ с} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

§ 1.50. Механический коэффициент полезного действия

В технике работа сил обычно связана с преодолением различных сопротивлений. Для выполнения этой работы создается множество разнообразных

машин и механизмов. Силы сопротивления F_c , которые преодолевает любая машина (механизм), можно разделить на две группы: сопротивления, для преодоления которых машина или механизм и предназначены и которые условно назовем *полезными сопротивлениями* $F_{п.с.}$, и так называемые *вредные сопротивления* $F_{в.с.}$, которые машине (механизму) приходится вынужденно преодолевать попутно с полезными. Работу по преодолению полезных сопротивлений назовем полезной и обозначим $W_{п.с.}$. Работу по преодолению вредных сопротивлений обозначим $W_{в.с.}$.

Тогда вся работа, совершаемая машиной или механизмом, $W = W_{п.с.} + W_{в.с.}$, отсюда $W_{п.с.} = W - W_{в.с.}$.

Отношение полезной работы ко всей совершенной работе называется механическим коэффициентом полезного действия (к. п. д.) и обозначается η . Таким образом,

$$\eta = \frac{W_{п.с.}}{W} \text{ или } \eta = \frac{W_{п.с.}}{W} 100\%. \quad (1.178)$$

Подставив в первую из этих формул вместо полезной работы ее значение $W_{п.с.} = W - W_{в.с.}$, получим

$$\eta = \frac{W - W_{в.с.}}{W} = 1 - \frac{W_{в.с.}}{W}. \quad (1.179)$$

Из формулы (1.179) видно, что к. п. д. тем ближе к единице, чем меньше дробь $W_{в.с.}/W$, т. е. чем меньше работа по преодолению вредных сопротивлений. Если в формуле (1.178) числитель и знаменатель разделить на t — время, в течение которого работает машина (механизм), то получим формулу к. п. д., выраженную через отношение мощностей:

$$\eta = P_n / P. \quad (1.180)$$

В технике распространены случаи работы машин или механизмов при их *последовательном соединении* друг с другом. В таких случаях важно знать зависимость их общего к. п. д. от коэффициентов полезного действия отдельных машин (механизмов). Допустим, имеем совокупность трех механизмов (рис. 1.164, а) с коэффициентами полезного действия η_1 , η_2 и η_3 . Если работа, совершаемая механизмами,

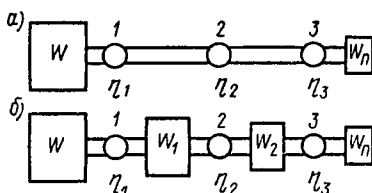


Рис. 1.164

W , а их полезная работа $W_{п.с.}$, то к. п. д. всей цепочки механизмов

$$\eta = W_{п.с.} / W. \quad (a)$$

Некоторую часть всей работы W составляет работа по преодолению вредных сопротивлений в самих механизмах. Поэтому полезная работа, совершаемая первым механизмом (рис. 1.164, б), $W_1 = W\eta_1$, совершаемая вторым механизмом — $W_2 = W_1\eta_2$ и третьим — $W_3 = W_2\eta_3$, исходя из того, что к. п. д. первого механизма $\eta_1 = W_1 / W$, к. п. д. второго механизма $\eta_2 = W_2 / W_1$ и к. п. д. третьего механизма $\eta_3 = W_{п.с.} / W_2$.

Перемножив левые и правые части этих равенств, получим

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = \frac{W_1}{W} \cdot \frac{W_2}{W_1} \cdot \frac{W_{п.с.}}{W_2} = \frac{W_{п.с.}}{W}. \quad (б)$$

Сопоставив равенства (а) и (б), видим, что

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3.$$

Ясно, что эта зависимость справедлива для любого конечного числа последовательно соединенных механизмов, т. е.

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \dots \eta_n \quad (1.181)$$

— при последовательном соединении механизмов (машин) их общий к. п. д. равен произведению отдельных к. п. д.

В частном случае, если $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_k = \dots = \eta_n$, общий к. п. д.

$$\eta = \eta_k^n. \quad (1.182)$$

Из формул (1.181) и (1.182) следует: чем длиннее «цепочка» совместно работающих механизмов, тем меньше ее общий к. п. д., причем общий к. п. д.

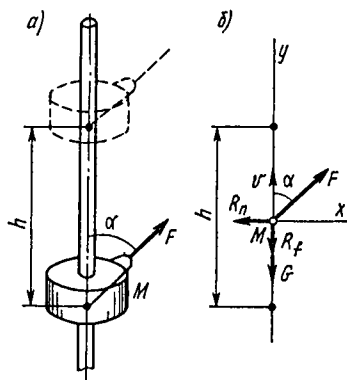


Рис. 1.165

всегда меньше самого низкого из числа перемножаемых к. п. д.

Пример 1.27. Тело M массой $m=40$ кг может перемещаться вдоль вертикального направляющего бруска (рис. 1.165, а). Под действием силы F , постоянно направленной под углом $\alpha=18^\circ$ к вертикали, тело равномерно поднимается на высоту $h=4$ м. Определить работу силы F и коэффициент полезного действия, если коэффициент трения при скольжении тела вдоль бруска $f=0,2$.

Решение. 1. При равномерном перемещении вдоль бруска вверх на тело кроме силы F действуют еще три силы: сила тяжести G , сила трения R_f , нормальная реакция бруска R_n (рис. 1.165, б).

2. Сила F производит работу

$$W = Fh \cos \alpha,$$

но чтобы определить ее, нужно сначала найти силу F .

3. Расположив оси координат, как показано на рис. 1.165, б, составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; \quad F \sin \alpha - R_n = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \quad F \cos \alpha - R_f - G = 0. \end{aligned}$$

Эти два уравнения содержат три неизвестные силы (F , R_n и R_f), поэтому добавим к ним уравнение основного закона трения

$$R_f = f R_n.$$

Подставив в последнее уравнение выражение $R_n = F \sin \alpha$ из первого, получим

$$R_f = f F \sin \alpha.$$

Решив его относительно F совместно со вторым уравнением равновесия, найдем

$$F = \frac{G}{\cos \alpha - f \sin \alpha}.$$

4. Подставив значение F в формулу работы (п. 2), получим

$$W = \frac{G}{\cos \alpha - f \sin \alpha} h \cos \alpha.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos \alpha$, получим окончательное выражение искомой работы

$$W = \frac{Gh}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}.$$

5. Имея в виду, что $G = mg$, после подстановки числовых значений величин находим

$$W = \frac{mgh}{1 - f \operatorname{tg} \alpha} = \frac{40 \cdot 9,8 \cdot 4}{1 - 0,2 \operatorname{tg} 18^\circ} = 1680 \text{ Дж.}$$

Работа силы F равняется 1680 Дж.

6. Определим к. п. д. при равномерном подъеме тела M :

$$\eta = W_{\text{п.с}} / W,$$

где вся произведенная работа $W = 1680$ Дж, а работа по преодолению полезного сопротивления состоит в подъеме тела M на высоту h , т. е.

$$W_{\text{п.с}} = Gh = mgh = 40 \cdot 9,8 \cdot 4 = 1570 \text{ Дж,}$$

а следовательно,

$$\eta = \frac{W_{\text{п.с}}}{W} = \frac{1570}{1680} = 0,935.$$

7. Если часть задачи, связанную с определением к. п. д., решить в общем виде, то получим

$$\eta = \frac{W_{\text{п.с}}}{W} = \frac{mgh}{mgh / (1 - f \operatorname{tg} \alpha)} = 1 - f \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, к. п. д. не зависит от массы (веса) тела и высоты его подъема, а зависит только от коэффициента трения f и угла α .

§ 1.51. Работа сил на наклонной плоскости

Пусть требуется поднять на высоту h груз, сила тяжести которого G . Предположим, что подъем осуществляется тремя способами (рис. 1.166): 1 — вертикально; 2 — по наклонной плоскости с углом подъема α и 3 — по менее крутой плоскости с углом подъема β ($\beta < \alpha$). Если считать, что груз перемещается равномерно и без трения, то работа по подъему груза во всех трех случаях совершена одинаковая — она равна Gh (см. § 1.46). Но в первом случае приходится преодолевать силу тяжести G , во втором случае — силу $G_\alpha = G \sin \alpha$ и в третьем — си-

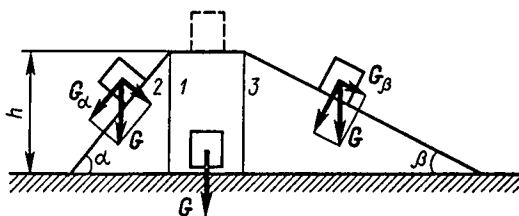


Рис. 1.166

лу $G_\beta = G \sin \beta$; при $\alpha > \beta$ $\sin \alpha > \sin \beta$ и, значит, $G > G \sin \alpha > G \sin \beta$.

Наклонная плоскость как одно из средств получения выигрыша в силе при перемещении тяжестей широко используется в технике. Например, любой винт можно рассматривать как наклонную плоскость, намотанную на цилиндр. В реальных условиях при перемещении грузов по наклонной плоскости необходимо учитывать трение (см. § 1.17).

Рассмотрим два случая работы силы F на наклонной плоскости.

Сила F направлена параллельно наклонной плоскости (рис. 1.167, а). При перемещении вверх по наклонной плоскости тела M на него кроме силы F действуют еще три силы (рис. 1.167, б): сила тяжести G ; нормальная реакция наклонной плоскости R_n , значение которой $R_n = G \cos \alpha$; сила трения R_f , значение которой [см. формулу (1.42)] $R_f = f R_n = f G \cos \alpha$.

При равномерном подъеме тела M четыре силы образуют уравновешенную систему (аксиома 1), значит, согласно формуле (1.167), алгебраическая сумма работ этих сил равна нулю:

$$W_F + W_G + W_{R_f} + W_{R_n} = 0,$$

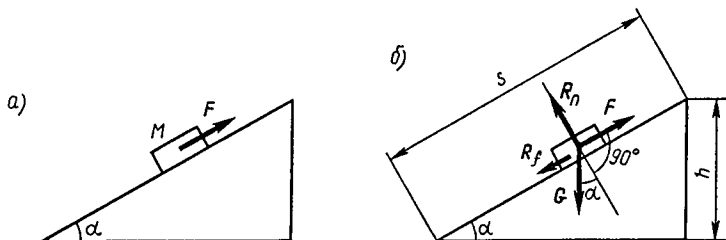


Рис. 1.167

откуда работа силы F

$$W_F = -W_G - W_{R_f} - W_{R_n},$$

где работа силы тяжести $W_G = Gs \cos(\alpha + 90^\circ) = -Gs \sin \alpha$; работа силы трения $W_{R_f} = R_f s \cos 180^\circ = -R_f s = -fGs \cos \alpha$; работа нормальной реакции $W_{R_n} = R_n s \cos 90^\circ = 0$.

Подставив найденные значения работ сил в последнее равенство, получим работу, совершенную силой F :

$$W_F = Gs(\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1.183)$$

Заменив в этой формуле коэффициент трения f его значением $f = \operatorname{tg} \varphi_0 = \sin \varphi_0 / \cos \varphi_0$, где φ_0 — угол трения, придадим формуле (1.183) несколько иной вид:

$$W_F = \frac{Gs \sin(\alpha + \varphi_0)}{\cos \varphi_0}. \quad (1.184)$$

Если же требуется определить значение силы F , то с учетом того, что $W_F = Fs$, из формул (1.183) и (1.184) получим

$$F = \frac{W_F}{s} = G(\sin \alpha + f \cos \alpha) = \frac{G \sin(\alpha + \varphi_0)}{\cos \varphi_0}. \quad (1.185)$$

Полезную часть работы силы F составляет работа по подъему тела на высоту $h = s \sin \alpha$, т. е. $W_n = Gh = Gs \sin \alpha$.

Таким образом, по формуле (1.173) к. п. д. наклонной плоскости

$$\eta = \frac{W_n}{W_F} = \frac{Gs \sin \alpha \cdot \cos \varphi_0}{Gs \sin(\alpha + \varphi_0)} = \frac{\sin \alpha \cos \varphi_0}{\sin(\alpha + \varphi_0)}.$$

После несложных преобразований получим окончательный вид формулы к. п. д. наклонной плоскости при подъеме груза силой, направленной параллельно наклонной плоскости:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{f + \operatorname{tg} \alpha}. \quad (1.186)$$

Как видим, к. п. д. наклонной плоскости зависит только от ее угла подъема и коэффициента трения при перемещении груза по плоскости.

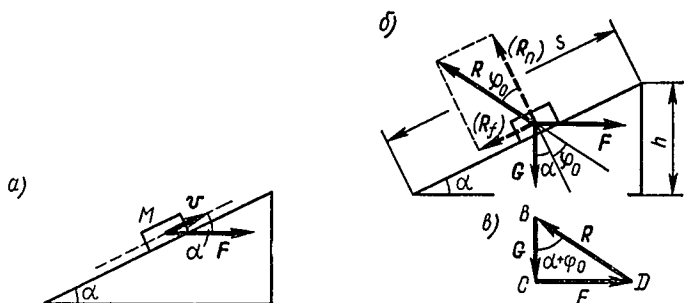


Рис. 1.168

Сила F направлена горизонтально (рис. 1.168, а). И в этом случае на тело M действуют четыре силы: движущая сила F , сила тяжести G , нормальная реакция наклонной плоскости R_n и сила трения R_f . Чтобы упростить задачу, силы R_n и R_f заменим их равнодействующей $R = R_n + R_f$ (рис. 1.168, б). При равномерном перемещении тела M по наклонной плоскости уравновешенная система сил F , G и R образует замкнутый треугольник BCD (рис. 1.168, в), в котором $\widehat{BCD} = 90^\circ$ и $\widehat{CBD} = \alpha + \varphi_0$. Поэтому

$$F = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_0)^*. \quad (1.187)$$

И, следовательно, работа силы F на наклонной плоскости длиной s

$$W_F = Fs \cos \alpha = Gs \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_0) \cos \alpha. \quad (1.188)$$

Полезная часть этой работы, как и в предыдущем случае, $W_n = Gh = Gs \sin \alpha$, а к. п. д. наклонной плоскости при подъеме груза горизонтальной силой

$$\eta = \frac{W_n}{W_F} = \frac{Gs \sin \alpha}{Gs \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_0) \cos \alpha}$$

или окончательно

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_0)}. \quad (1.189)$$

* В первом случае формулу (1.185) можно получить также из силового треугольника, построенного на силах F , G и $R = R_n + R_f$ (см. рис. 1.167).

§ 1.52. Работа и мощность при вращательном движении тел

Допустим, что к рукоятке C колеса, насаженного на ось Oz , приложена сила F , постоянно направленная перпендикулярно $CO=r$ (рис. 1.69, a). При вращении колеса точка приложения силы F перемещается по окружности и элементарная работа этой силы

$$dW = Fds.$$

Но так как $ds = r d\varphi$, то $dW = Fr d\varphi$, где произведение $Fr = M_z$ называется *вращающим моментом*. Следовательно, при вращении тела элементарная работа

$$dW = M_z d\varphi. \quad (1.190)$$

При повороте колеса на угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ работа

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \quad (1.191)$$

Если при этом вращающий момент $M_z = \text{const}$, то

$$W = M_z \varphi \quad (1.192)$$

— *работа при вращении тела равна произведению вращающего момента на угол поворота φ* .

Следует заметить, что вращение тела обусловлено появлением пары сил (F, F_2). Сила F , действуя на тело, прижимает его к оси (сила F_1 на рис. 1.169, b), а возникающая реакция F_2 оси вместе с силой F образует пару сил с моментом $M_z = Fr$, которая и приводит тело во вращение. Разделив обе части равенства (1.192) на $t = t_2 - t_1$ — время действия вращающего момента, получим его мощность:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{M_z \varphi}{t}, \quad (1.193)$$

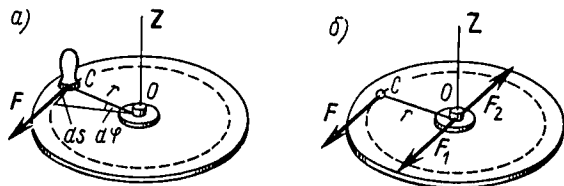


Рис. 1.169

или, так как $\varphi/t = \omega$,

$$P = M_z \omega \quad (1.194)$$

— мощность при вращении тела равна произведению вращающего момента на угловую скорость.

Из последней формулы вытекает важное следствие:

$$M_z = \frac{P}{\omega} \quad (1.195)$$

— при постоянной мощности вращающий момент обратно пропорционален угловой скорости.

Пример 1.28. Токарный станок приводится в движение электродвигателем мощностью $P = 2,21$ кВт. Считая, что к шпинделю подводится лишь 0,8 мощности двигателя, определить вертикальную составляющую силы резания. Диаметр обрабатываемой детали $d = 200$ мм, частота вращения шпинделя $n = 92$ об/мин.

Решение. 1. К шпинделю станка подводится полезная мощность

$$P_n = \eta P,$$

где $\eta = 0,8$.

2. В процессе обработки на деталь действует момент силы резания

$$M_z = F \frac{d}{2},$$

где F — искомая вертикальная составляющая силы резания, d — диаметр обрабатываемой детали.

3. Из формулы (1.194) следует, что

$$M_z = P_n / \omega.$$

Подставив сюда выражение M_z из п. 2 и выражение P_n из п. 1, получим

$$F \frac{d}{2} = \frac{\eta P}{\omega}.$$

4. Имяя в виду, что $d = 200$ мм $= 0,2$ м, $P = 2,21$ кВт $= 2210$ Вт и $\omega = \pi n / 30 = \pi \cdot 92 / 30 = 9,65$ рад/с, получим

$$F = \frac{2\eta P}{d\omega} = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 2210}{0,2 \cdot 9,65} = 1830 \text{ Н} = 1,83 \text{ кН}.$$

Вертикальная составляющая силы резания равна 1,83 кН.

§ 1.53. Трение качения. Работа при качении тел

Трением качения называется сопротивление, возникающее при перекачивании тела по поверхности другого. Возникновение сопротивления при перека-

тывании тела происходит из-за деформирования обоих тел в месте их взаимодействия. Допустим, что тело 1 и поставленный на него каток 2, радиус которого r , абсолютно недеформируемы и местом их соприкосновения будет перпендикулярная плоскости рис. 1.170, a линия, проходящая через точку K . Если теперь приложить к оси катка любую сколь угодно малую силу F , то она вместе с силой трения R_f , приложенной к катку в точке K , образует пару (F, R_f) , под действием которой каток начнет катиться.

На самом деле абсолютно недеформируемых тел нет. Поэтому тело 1 и поставленный на него каток 2 в области точки K несколько деформируются (рис. 1.170, b). При перекаtywании катка силой F деформация смещается вперед по направлению качения и место приложения полной реакции R (рис. 1.170, $в$) опорной поверхности смещается также несколько вперед на длину f_k относительно теоретической точки касания K и отклоняется от нормали Vn на небольшой угол.

Разложив реакцию R на составляющие R_n и R_f , видим, что при качении катка на него действуют четыре силы, образующие две пары сил: движущую пару (F, R_f) с моментом $|Fr|$ и пару сопротивления качению (G, R_n) с моментом $|R_nf_k|$. Момент пары сопротивления иначе называют *моментом трения качения*, а величину f_k — *коэффициентом трения качения*. Значение f_k зависит от материала тел и выражается обычно в сантиметрах. Например, для мягкой стали по стали $f_k = 0,005$ см, а для закаленной стали по стали (подшипники качения) $f_k = 0,001$ см. Качение катка 2 начинается тогда, когда момент движущей пары достигнет предельного значения момента трения качения, определяемого значением f_k для данной

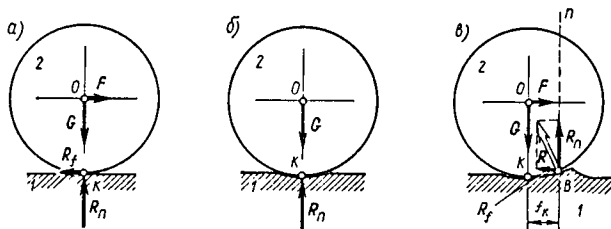


Рис. 1.170

пары тел, т. е. при условии

$$Fr \geq R_n f_k.$$

Отсюда необходимая для перекачивания катка сила

$$F \geq \frac{R_n f_k}{r}. \quad (1.196)$$

Зная силу F , легко найти ее работу при равномерном перекачивании катка на расстоянии s по формуле (1.163):

$$W = Fs = \frac{R_n f_k s}{r}. \quad (1.197)$$

Работу силы F при качении тела можно определять и по формуле (1.192). В этом случае качение тела следует рассматривать как вращение около мгновенной оси, проходящей через точку K (см. § 1.39), и в формулу (1.192) вместо M_z подставляем значение $M_{\text{вр}} = Fr = R_n f_k$:

$$W = M_z \varphi = R_n f_k \varphi.$$

Но $\varphi = s/r$ и поэтому

$$W = \frac{R_n f_k s}{r}.$$

Получена та же формула (1.197).

Пример 1.29. Каток массой $m = 100$ кг, диаметром $d = 1$ м вкатывается равномерно по наклонной плоскости на горизонтальную платформу высотой $h = 2$ м силой F , действующей параллельно наклонной плоскости и приложенной к тросу, охватывающему каток (рис. 1.171, а). Определить работу силы F , если угол подъема $\alpha = 30^\circ$, коэффициент трения качения $f_k = 0,3$ см.

Решение. 1. Вкатывание катка по наклонной плоскости

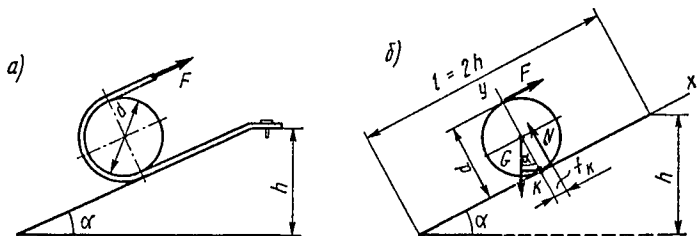


Рис. 1.171

происходит под действием момента силы F относительно точки K (рис. 1.171, б), т. е.

$$M_z = Fd.$$

При движении по всей длине наклонной плоскости угол поворота катка составляет

$$\varphi = \frac{l}{r} = 2h : \frac{d}{2} = \frac{4h}{d}.$$

Следовательно, по формуле (1.192) работа силы F

$$W = M_z \varphi = Fd \frac{4h}{d} = F \cdot 4h.$$

2. На каток кроме искомой силы F действуют еще две: сила тяжести

$$G = mg = 100 \cdot 9,8 = 98,0 \text{ Н}$$

и нормальная реакция плоскости $N = G \cos \alpha$, приложенная впереди теоретической точки касания K на расстоянии $f_k = 0,3$ см. При равномерном вкатывании по наклонной плоскости на каток действует уравновешенная система сил, а значит алгебраическая сумма их моментов относительно любой точки равняется нулю.

Приняв за центр моментов точку K , получим

$$Fd - G \frac{d}{2} \sin \alpha - G \cos \alpha \cdot f_k = 0.$$

Откуда

$$F = \frac{G \left(\frac{d}{2} \sin \alpha + f_k \cos \alpha \right)}{d} = \frac{980 (50 \sin 30^\circ + 0,3 \cos 60^\circ)}{100} = 248 \text{ Н}.$$

3. Находим работу силы

$$W = 248 \cdot 4 \cdot 2 = 1984 \text{ Дж}.$$

4. Известно, что наклонная плоскость при подъеме по ней тел позволяет получить выигрыш в силе, равный отношению ее длины к высоте. Следовательно, эта плоскость даст выигрыш, равный двум ($l/h = 2h/h = 2$).

Объясните, почему при вкатывании катка указанным в задаче способом выигрыш в силе получился почти четырехкратным (каток силой тяжести 980 Н поднят силой 248 Н).

Определите самостоятельно к. п. д. при вкатывании катка по наклонной плоскости.

Вопросы для самопроверки

1. Вагонетка массой 500 кг катится равномерно по горизонтальным рельсам и проходит расстояние 2 м. Чему равна работа силы тяжести?

2. Шарик силой тяжести 5 Н, катящийся с некоторой скоростью, по инерции прокатился вверх по наклонной плоскости с

углом подъема 30° на длину 2 м. Чему равна работа силы тяжести?

3. Как изменится вращающий момент, если при постоянной мощности угловая скорость уменьшится в 5 раз? увеличится в 2 раза?

4. Известно, что сила сопротивления воды движению теплохода пропорциональна квадрату его скорости. Объясните, почему при необходимости увеличить скорость теплохода в 2 раза его дизели должны увеличить мощность в 8 раз.

ГЛАВА 12. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

§ 1.54. Импульс силы. Количество движения.

Кинетическая энергия

Из основного закона динамики (1.151), сформулированного в гл. 10, вытекают так называемые общие теоремы динамики, с помощью которых значительно упрощается решение некоторых задач динамики.

Любое взаимодействие тел, приводящее к какому-либо изменению движения, длится в течение некоторого времени.

Векторная мера действия силы

$$Fdt, \quad (1.198)$$

равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия, называется элементарным импульсом силы. Направление вектора импульса совпадает с направлением вектора силы. Единица импульса в СИ — Н·с:

$$1 \text{ Н} \cdot \text{с} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}.$$

Импульс силы за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ получим, просуммировав элементарные импульсы:

$$\int_{t_1}^{t_2} Fdt. \quad (1.199)$$

Отсюда следует, что при $F = \text{const}$ импульс силы за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равен

$$F\Delta t. \quad (1.200)$$

Если на точку действуют несколько сил, то их общий импульс равен геометрической сумме импульсов отдельных сил.

Векторная мера механического движения точки

$$mv, \quad (1.201)$$

равная произведению массы точки на ее скорость в данный момент времени, называется количеством движения. Направление вектора количества движения совпадает с направлением вектора скорости. Единица количества движения в СИ — кг·м/с. Как видим, единицы импульса силы и количества движения одинаковы.

Скалярная мера механического движения точки

$$\frac{mv^2}{2}, \quad (1.202)$$

равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, называется кинетической энергией. Единица кинетической энергии — джоуль (Дж); $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$.

§ 1.55. Теорема об изменении количества движения точки

Пусть на точку массой m действует система постоянных сил, равнодействующая которых F_{Σ} . Согласно основному закону динамики (1.154),

$$F_{\Sigma} = ma.$$

Учитывая время действия сил, умножим обе части равенства на продолжительность их действия Δt :

$$F_{\Sigma} \Delta t = ma \Delta t.$$

Подставив в это равенство вместо a его выражение [см. § 1.25, формула (1.79)]

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t},$$

получим

$$F_{\Sigma} \Delta t = mv_2 - mv_1. \quad (1.203)$$

Разность $mv_2 - mv_1$ равна изменению количества движения, и теорема, выражаемая уравнением (1.203), читается так: *изменение количества движения точки равно импульсу всех сил.*

Спроецировав на оси координат обе части векторного равенства (1.203), в общем случае получим систему трех скалярных уравнений

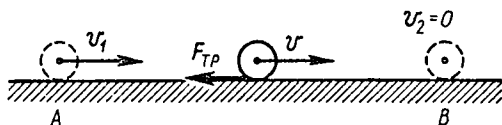


Рис. 1.172

$$\left. \begin{aligned} F_{\Sigma x} \Delta t &= mv_{2x} - mv_{1x}; \\ F_{\Sigma y} \Delta t &= mv_{2y} - mv_{1y}; \\ F_{\Sigma z} \Delta t &= mv_{2z} - mv_{1z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.204)$$

где $F_{\Sigma x} = \sum F_{kx}$; $F_{\Sigma y} = \sum F_{ky}$; $F_{\Sigma z} = \sum F_{kz}$.

Если силы, действующие на точку, лежат в одной плоскости, то получим два скалярных уравнения. Если силы действуют вдоль одной прямой, то, спроецировав уравнение (1.203) на эту прямую, получим одно скалярное уравнение

$$F_{\Sigma} \Delta t = mv_2 - mv_1. \quad (1.205)$$

Пример 1.30. Шофер автомобиля, движущегося со скоростью 60 км/ч, выключил двигатель и начал торможение. Через сколько времени автомобиль остановится, если сила торможения составит 0,8 от силы тяжести автомобиля?

Решение 1. Приняв автомобиль за материальную точку, отметим на рис. 1.172 буквой *A* место начала торможения, в этот момент скорость автомобиля $v_1 = 60 \text{ км/ч} = 16,7 \text{ м/с}$, а буквой *B* — место остановки автомобиля $v_2 = 0$. При движении автомобиля между точками *A* и *B* в течение Δt с на него действует тормозящая сила $F_{\text{тр}} = R_f$, равная $R_f = 0,8G = 0,8mg$.

2. Применительно к данному случаю уравнение (1.203) примет вид

$$R_f \Delta t = -mv_1.$$

Спроецировав обе части равенства на ось, проходящую через точки *A* и *B*, получим

$$-R_f \Delta t = -mv_1,$$

откуда

$$\Delta t = \frac{mv_1}{R_f} = \frac{mv_1}{0,8mg} = \frac{16,7}{0,8 \cdot 9,8} = 2,13 \text{ с.}$$

Автомобиль остановится через 2,13 с.

§ 1.56. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Пусть, как и в предыдущем случае (см. § 1.55), на точку действует система постоянных сил, равнодействующая которых F_{Σ} , и ради упрощения рассуждений

допустим, что силы действуют вдоль одной прямой. Тогда основному закону динамики в векторной форме эквивалентно равенство

$$F_{\Sigma} = ma.$$

Умножим обе части этого равенства на перемещение точки Δs :

$$F_{\Sigma} \Delta s = ma \Delta s.$$

При действии постоянных сил на прямолинейном пути (см. § 1.29)

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \quad \text{и} \quad \Delta s = v_{\text{cp}} \Delta t = \frac{(v_2 + v_1) \Delta t}{2}.$$

Подставим эти значения a и Δs в последнее равенство:

$$F_{\Sigma} \Delta s = \frac{m(v_2 - v_1)}{\Delta t} \cdot \frac{(v_2 + v_1) \Delta t}{2}.$$

Отсюда с учетом того, что $F_{\Sigma} \Delta s = W_{\Sigma} = \sum W_k$ (см. § 1.47),

$$\sum W_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (1.206)$$

т. е. *изменение кинетической энергии точки равно сумме работ действующих сил.*

Если точка движется равномерно, т. е. $v_1 = v_2$, и изменение кинетической энергии $mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = 0$, то из формулы (1.26) получим

$$\sum W_k = 0$$

— известную из § 1.47 формулу (1.167).

Если $v_1 > v_2$, то изменение кинетической энергии $mv_2^2/2 - mv_1^2/2 > 0$, т. е. кинетическая энергия точки возрастает и, значит, работа движущих сил больше работ сил сопротивления.

Если $v_1 < v_2$, то изменение кинетической энергии $mv_2^2/2 - mv_1^2/2 < 0$, т. е. кинетическая энергия точки убывает и, значит, силы сопротивления совершают большую работу, чем движущие силы.

Пример 1.31. По условию примера 1.30 определить длину тормозного пути $AB = s$ автомобиля.

Решение. В соответствии с исходными данными (см. рис. 1.172) уравнение кинетической энергии (1.206) примет вид

$$-R_f s = -\frac{mv_1^2}{2}.$$

Отсюда, имея в виду, что $\dot{R}_f = 0,8mg$, получим

$$s = \frac{mv_1^2}{2 \cdot 0,8mg} = \frac{16,7^2}{2 \cdot 0,8 \cdot 9,8} \approx 17 \text{ м.}$$

Тормозной путь составляет 17 м.

§ 1.57. Понятие о механической системе

Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется механической системой. Например, механическую систему образуют Земля и Луна или спортивный самолет и буксируемый им планер. Но как только планер освободится от буксирного троса, самолет и планер перестают быть механической системой.

Любое материальное тело рассматривается в механике как механическая система, образуемая совокупность материальных точек. Причем *абсолютно твердое тело носит название неизменяемой механической системы*, так как расстояние между материальными точками остается неизменным. *Механические системы, расстояния между точками которых могут меняться, называются изменяемыми.* К ним относятся, в частности, любые машины или механизмы.

Если рассматривать какую-либо механическую систему, то силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в эту систему, называются *внешними*, а силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел этой же системы, называются *внутренними*. Например, для механической системы Земля—Луна сила притяжения к Солнцу является внешней, а силы их взаимного притяжения друг к другу—внутренними.

Внешние силы принято обозначать с индексом *e*: F_e , R_e , а внутренние силы—с индексом *i*: F_i (от латинских слов «exterior» — внешний и «interior» — внутренний).

Так как, согласно четвертой аксиоме динамики, внутренние силы взаимодействия между отдельными

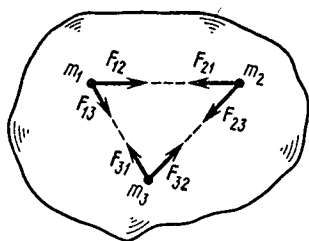


Рис. 1.173

точками механической системы (рис. 1.173) попарно равны ($F_{12} = F_{21}$; $F_{23} = F_{32}$; $F_{31} = F_{13}$ и т. д.) и направлены противоположно вдоль прямых, соединяющих эти точки, то главный вектор всех внутренних сил механической системы равен нулю, причем если рассматри-

ваемая механическая система неизменяемая, т. е. представляет собой абсолютно твердое тело, то внутренние силы уравниваются; если же рассматривается изменяемая механическая система, то внутренние силы взаимно не уравниваются, так как, приложенные к разным телам, они могут вызвать их взаимное перемещение.

Движение механической системы зависит не только от действующих сил, оно зависит также, во-первых, от суммарной массы системы

$$m = \sum \Delta m_k, \quad (1.207)$$

где m — масса механической системы и Δm_k — массы ее отдельных точек, и, во-вторых, от положения центра масс системы.

Если считать, что механическая система расположена в поле земного притяжения, то положение центра масс совпадает с положением центра тяжести системы. Вместе с тем понятия «центр масс» и «центр тяжести» не следует отождествлять. Центр масс как характеристика распределения масс внутри системы не зависит от того, находится ли данная система под действием каких-либо сил или нет. Иначе говоря, если механическую систему вынести из поля притяжения Земли, то понятие «центр тяжести» потеряет смысл, а центр масс сохранит и свое положение, и смысл.

Движение центра масс определяется уравнением

$$F_{e\Sigma} = ma_c, \quad (1.208)$$

где $F_{e\Sigma}$ — результирующая всех внешних сил, приложенных к точкам системы; m — масса системы и a_c — ускорение центра масс системы.

Как видим, это уравнение аналогично уравнению (1.152) — основному уравнению динамики точки, и

смысл его состоит в том, что центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и приложены все внешние силы.

Используя уравнение (1.208) при решении задач, необходимо иметь в виду следующее. Движение центра масс характеризует движение всей системы только при ее поступательном движении. В частном случае, если $F_{c\Sigma} = 0$, то и $a_c = 0$. Значит, система движется равномерно и прямолинейно либо находится в состоянии покоя. Внутренние силы никак не влияют на движение центра масс. Например, для автомобиля движущей является внешняя сила трения, приложенная к его ведущим колесам.

§ 1.58. Основное уравнение динамики вращающегося тела

Пусть твердое тело (рис. 1.174) под действием внешних сил F_{ek} (эти силы на рисунке не показаны) вращается около оси Oz с угловым ускорением ε . Алгебраическая сумма моментов всех сил (активных сил и сил сопротивления) относительно оси Oz

$$M_{cz} = \sum M_z(F_{ek})$$

называется *вращающим моментом*. Найдем зависимость между угловым ускорением ε тела и действующим на него вращающим моментом M_{cz} .

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем его на множество материальных точек с массами Δm_k . При вращении тела каждая из этих точек движется по окружности радиуса ρ_k с ускорением a_k , которое разложим на касательное a_{kt} и нормальное a_{kn} ускорения.

Приложим к каждой материальной точке элементарные силы инерции: касательную $\Delta F_{инкт} = -\Delta m a_{kt}$ и нормальную $\Delta F_{инкн} = -\Delta m a_{kn}$. Согласно принципу Даламбера (см. § 1.45), активные силы, силы

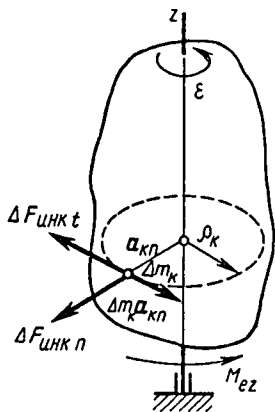


Рис. 1.174

реакции связей и силы инерции образуют уравновешенную систему. Поэтому алгебраическая сумма моментов всех этих сил относительно оси Oz должна быть равна нулю, т. е.

$$M_{ez} - \sum \Delta F_{инкт} \rho_k = 0$$

(моменты сил $\Delta F_{инкт}$ относительно оси Oz равны нулю, так как линии действия этих сил пересекают ось, см. § 1.19).

У любой точки вращающегося тела числовое значение касательного ускорения $a_{kt} = \varepsilon \rho_k$ [см. формулу (1.128)], поэтому значение $\Delta F_{инкт} = \Delta m_k a_{kt} = \Delta m_k \varepsilon \rho_k$, где ε — угловое ускорение тела. Подставив полученное значение $\Delta F_{инкт}$ в предыдущее уравнение и вынеся за знак суммы постоянную величину ε , получим

$$M_{ez} = \varepsilon \sum \Delta m_k \rho_k^2.$$

Величина $\sum \Delta m_k \rho_k^2 = J_z$, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний от оси вращения, называется *моментом инерции тела (системы) относительно этой оси*.

Введя в последнее равенство принятое обозначение, получим *основное уравнение динамики вращающегося тела*, выражающее прямо пропорциональную зависимость между действующим на тело вращающимся моментом и полученным вследствие этого угловым ускорением:

$$M_{ez} = J_z \varepsilon. \quad (1.209)$$

Момент инерции J_z в этом уравнении играет ту же роль, что и масса в уравнении (1.152), и выражает меру инертности тела при вращательном движении.

Из выражения $J_z = \sum \Delta m_k \rho_k^2$, которому можно придать и интегральную форму:

$$J_z = \int_v \rho_k^2 dm_k, \quad (1.210)$$

видно, что в СИ момент инерции тела выражается в $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. При решении задач в механике обычно применяют дольные единицы: $1 \text{ кг} \cdot \text{см}^2 = 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ или $1 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2 = 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Из формулы (1.210) следует, что значение момента инерции зависит главным образом от распределения

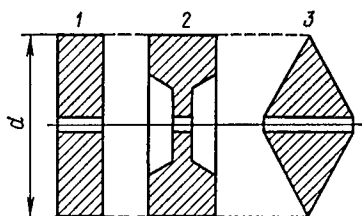


Рис. 1.175

массы тела относительно оси вращения. Представим себе три колеса одинакового диаметра и одинаковой массы m , различие формы которых показано их осевыми сечениями на рис. 1.175. По сравнению с колесом 1, имеющим форму плоского сплошного диска, часть массы колеса 2 расположена дальше от оси вращения, а часть массы колеса 3, наоборот, приближена к оси. Ввиду того что момент инерции тела складывается из элементарных моментов инерции $\Delta m_k \rho_k^2$ отдельных точек, ясно, что при одинаковой массе из трех колес момент инерции второго наибольший, а третьего — наименьший, т. е. $J_2 > J_1 > J_3$.

Иногда для упрощения расчетов используют понятие радиуса инерции тела $i_z = \sqrt{J_z/m}$, откуда $i_z^2 = J_z/m$, и тогда момент инерций тела

$$J_z = m i_z^2. \quad (1.211)$$

§ 1.59. Моменты инерции некоторых тел

Воспользовавшись общей формулой (1.210), выведем формулы моментов инерции некоторых тел.

Моменты инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню и расположенной у одного из его концов (рис. 1.176). Выделим на расстоянии y от оси z элемент стержня длиной dy и массой dm . Принимая во внимание однородность стержня и постоянство поперечного сечения по всей длине, можно считать, что $dm = \gamma dy$, где $\gamma = m/l$ — масса единицы длины стержня. Тогда элементарный момент инерции $\rho^2 dm = \gamma y^2 dy$. Просуммируем их по всей длине стержня, т. е. в пределах от 0 до l :

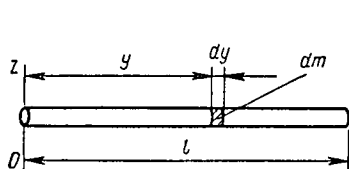


Рис. 1.176

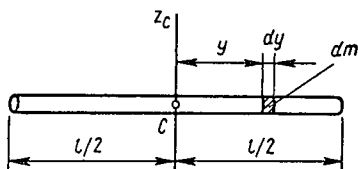


Рис. 1.177

$$J_z = \int_0^l \gamma y^2 dy = \gamma \int_0^l y^2 dy = \gamma l^3 / 3.$$

Подставим вместо γ ее значение m/l и получим окончательно

$$J_z = \frac{ml^2}{3}. \quad (1.212)$$

Момент инерции этого же стержня относительно оси z_c , проходящей через середину стержня (рис. 1.177). Ось z_c называется центральной, так как проходит через центр тяжести тела. Поступаем так же, как и в предыдущем случае, и получаем то же значение элементарного момента инерции, но при суммировании их по всей длине стержня получим

$$J_{z_c} = \gamma \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \gamma \frac{y^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \gamma \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) = \gamma \frac{l^3}{12}.$$

Помня, что $\gamma = m/l$, окончательно имеем

$$J_{z_c} = \frac{ml^2}{12}. \quad (1.213)$$

Для момента инерции тела относительно оси, параллельной центральной, существует зависимость — теорема Гюйгенса

$$J_z = J_{z_c} + me^2, \quad (1.214)$$

где J_z — момент инерции относительно данной оси; J_{z_c} — момент инерции относительно центральной оси, параллельной данной; m — масса тела; e — расстояние между осями.

Зная формулу (1.212) и используя зависимость (1.214) при $e = l/2$, можно получить формулу (1.213).

Момент инерции тонкой круглой однородной пластинки радиуса r и массы m относительно централь-

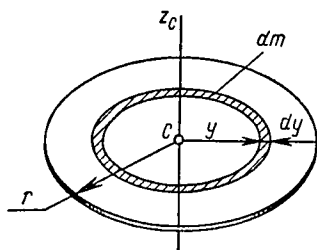


Рис. 1.178

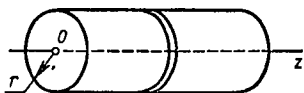


Рис. 1.179

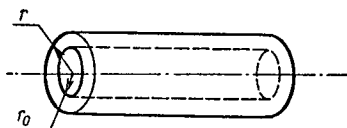


Рис. 1.180

ной оси z_c , перпендикулярной плоскости пластинки (рис. 1.178). Выделим в пластинке элемент массой dm в виде кольца радиуса y и шириной dy . Площадь кольца ввиду малости dy можно принять равной $2\pi y \cdot dy$. Тогда элементарная масса $dm = \gamma \cdot 2\pi y \cdot dy$, где $\gamma = m/(\pi r^2)$ — масса единицы площади пластинки. Просуммируем элементарные моменты инерции пластинки $\rho^2 dm = \gamma \cdot 2\pi y^3 dy$ по всей площади, т. е. в пределах от 0 до r :

$$J_{z_c} = \int_0^r \gamma \cdot 2\pi y^3 dy = 2\pi\gamma \int_0^r y^3 dy = 2\pi\gamma r^4/4.$$

Заменим γ ее значением $m/(\pi r^2)$ и получим

$$J_{z_c} = mr^2/2. \quad (1.215)$$

Если ввести в эту формулу диаметр диска $d=2r$, то получим

$$J_{z_c} = \frac{md^2}{8}. \quad (1.216)$$

Момент инерции сплошного однородного цилиндра массой m относительно его геометрической оси z (рис. 1.179) выражается также формулами (1.215) и (1.216), так как цилиндр можно представить состоящим из тонких однородных дисков одного и того же радиуса r (диаметра $d=2r$).

Момент инерции полого цилиндра массой m относительно геометрической оси z выражается формулой (приводим ее без вывода)

$$J_z = \frac{m(r^2 + r_0^2)}{2} = \frac{m(d^2 + d_0^2)}{8}, \quad (1.217)$$

где $d=2r$ — наружный диаметр, а $d_0=2r_0$ — внутренний диаметр цилиндра (рис. 1.180). При $d_0=2r_0=0$ формула (1.217) превращается в формулы (1.215) или (1.216), а при $d_0=d$ (или $r_0=r$) — в формулу

$$J_z = mr^2 = \frac{md^2}{4}. \quad (1.218)$$

Эту формулу используют в тех случаях, когда разность $d-d_0=2(r-r_0)$ ничтожно мала (цилиндр получен свертыванием, например, тонкого стального листа) и всю массу условно можно считать расположенной по поверхности цилиндра.

Момент инерции шара относительно оси, совпадающей с его диаметром, выражается формулой

$$J_z = \frac{2}{5}mr^2 = 0,1md^2, \quad (1.219)$$

где m — масса; $d=2r$ — диаметр шара.

§ 1.60. Кинетическая энергия тела. Кинетический момент

Кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетических энергий его отдельных точек. При поступательном движении тела скорости всех его точек равны между собой и равны v_c — скорости центра масс тела (рис. 1.181). Поэтому легко понять, что кинетическая энергия тела при поступательном движении

$$E_{к.п.} = \frac{mv_c^2}{2}, \quad (1.220)$$

где m — масса тела; v_c — значение скорости центра масс.

При вращательном движении тела с некоторой угловой скоростью ω (рис. 1.182) все его точки движутся по окружностям различных радиусов ρ_k и имеют скорости $v_k = \omega\rho_k$ [см. § 1.35, формула (1.127)]. Определив кинетическую энергию каждой точки $\Delta m_k \rho_k^2 / 2$ и сложив их по всему объему тела, получим

$$E_{к.вр} = \sum \frac{\Delta m_k v_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_k \omega^2 \rho_k^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_k \rho_k^2.$$

А так как $\sum \Delta m_k \rho_k^2 = J_z$ — момент инерции тела

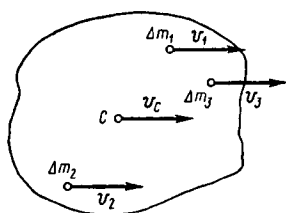


Рис. 1.181

относительно оси z , находим для кинетической энергии такое выражение:

$$E_{\text{к. вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (1.221)$$

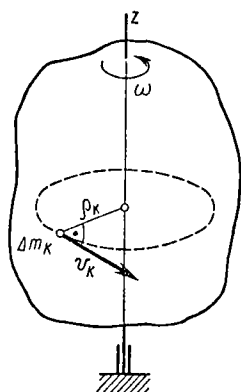


Рис. 1.182

Кинетическая энергия тела при сложном его движении (при плоскопараллельном, в частности) складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения с угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр масс, т. е.

$$E_{\text{к}} = E_{\text{к. п}} + E_{\text{к. вр}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (1.222)$$

Кроме кинетической энергии мерой вращательного движения тела является величина

$$J_z \omega, \quad (1.223)$$

называемая кинетическим моментом вращающегося тела. Кинетический момент в СИ выражается в $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

Пример 1.32. Маховик массой $m = 660 \text{ кг}$ и диаметром $d = 3 \text{ м}$ укреплен на валу, установленном в подшипниках, и помещен в герметичном кожухе. Для определения момента трения $M_{\text{тр}}$ в подшипниках маховику придали частоту вращения $n_0 = 2400 \text{ об/мин}$, а затем отсоединили привод. Спустя $t = 10 \text{ мин}$ маховик перестал вращаться. Определить $M_{\text{тр}}$, считая его постоянным. Радиус инерции маховика $i_z = 0,46d$.

Решение. 1. Частоте вращения маховика n_0 соответствует начальная угловая скорость

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \cdot 2400}{30} = 80\pi \text{ рад/с}.$$

2. Радиус инерции $i_z = 0,46d$, следовательно, его момент инерции

$$J_z = m i_z^2 = 600 (0,46d)^2 = 1140 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

3. Искомый момент трения $M_{\text{тр}} = \text{const}$, значит после отключения привода маховик вращался равнозамедленно и через $t = 10 \text{ мин} = 600 \text{ с}$ остановился ($\omega = 0$), успев повернуться на угол

$$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = \frac{80\pi}{2} 600 = 24\,000\pi \text{ рад.}$$

4. Изменение кинетической энергии маховика равняется работе момента трения, т. е.

$$-M_{\text{тр}} \varphi = \frac{J_z \omega^2}{2} - \frac{J_z \omega_0^2}{2}.$$

Отсюда, имея в виду, что конечная угловая скорость маховика $\omega = 0$, получим

$$M_{\text{тр}} = \frac{J_z \omega_0^2}{2\varphi} = \frac{1140 (80\pi)^2}{2 \cdot 24\,000\pi} = 478 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое момент инерции тела и от чего зависит его значение?

2. Может ли у одного из двух вращающихся тел с меньшей массой быть больше момент инерции относительно их общей оси?

3. Алюминиевый сплошной цилиндр и медный в виде трубы имеют одинаковые массы и внешние размеры. У которого из них момент инерции относительно геометрической оси больше?

4. Тело массой m имеет скорость v , а тело массой $0,5m$ — скорость $2v$. Одинаковые ли у них запасы кинетической энергии?

Раздел второй

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 2.1. Задачи сопротивления материалов

Любая машина или постройка представляет собой более или менее сложную материальную конструкцию, которая, сохраняя форму и размеры отдельных элементов, должна выдерживать определенные, иногда очень значительные, нагрузки. В теоретической механике при определении реакций опор не возникало проблемы сохранения формы и размеров рассматриваемых в задачах элементов конструкций, так как они считались абсолютно твердыми — неизменяемыми. На самом деле под действием внешних сил все твердые материальные тела деформируются, т. е. их форма и размеры изменяются.

Представим себе балку AB (рис. 2.1, a), один конец которой шарнирно закреплен на неподвижной опоре, а второй также шарнирно опирается на вертикальный стержень BC . Если конструкцию нагрузить силой F (рис. 2.1, b), то она деформируется: балка изгибается, а стержень укорачивается и отклоняется от первоначального вертикального положения, как показано штриховыми линиями на рис. 2.1, b . После снятия нагрузки F (при условии, что под действием силы F не произойдет разрушения) конструкция либо полностью восстанавливает первоначальную форму, по-

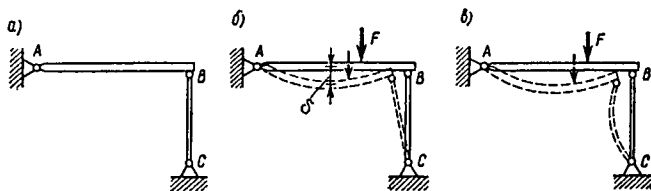


Рис. 2.1

казанную на рис. 2.1, а, либо остается деформированной, хотя и в несколько меньшей степени, чем на рис. 2.1, б.

В первом случае под действием силы F в элементах конструкции возникали упругие деформации, а во втором помимо упругих появились остаточные (пластические) деформации. Возникновение остаточных деформаций может привести к нарушению нормальной работы конструкции, и поэтому они недопустимы.

Способность конструкции (или отдельного ее элемента) выдерживать заданную нагрузку не разрушаясь и без появления остаточных деформаций называется прочностью.

Из рис. 2.1, б видно, что под действием силы F балка AB прогибается на величину δ , называемую *стрелой прогиба*. Если при упругой деформации стрела прогиба превысила определенное допустимое значение, то также может нарушиться нормальная работа конструкции.

Способность конструкции (или отдельного элемента) сопротивляться упругим деформациям называется жесткостью.

Стержень BC , поддерживающий балку, при некотором значении силы F , действующей на конструкцию, может внезапно изогнуться, как показано штриховыми линиями на рис. 2.1, в. В этом случае сжатый стержень теряет свое первоначальное прямолинейное состояние.

Способность конструкции (или отдельного элемента) сохранять первоначальную форму упругого равновесия называют устойчивостью.

В машиностроении или строительстве при проектировании и изготовлении какой-либо механической конструкции необходимо исходить из неизбежности возникновения упругих деформаций, предъявляя при этом к каждому элементу определенные требования в отношении прочности, жесткости и устойчивости. Сопротивление материалов, опираясь на законы и положения теоретической механики и математики, а также на результаты, получаемые при испытаниях конкретных материалов, разрабатывает приемы и методы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость в целях обеспечения работоспособности конструкции при минимальной затрате материалов.

В сопротивлении материалов, как и в теорети-

ческой механике решение задач начинается с выявления существенных факторов и отбрасывания несущественных, которые не влияют заметным образом на работу конструкции в целом. Такого рода упрощения необходимы, поскольку решение задач с полным учетом всех свойств реального объекта невозможно в силу их неисчерпаемости. Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название *расчетной схемы*. Выбор расчетной схемы сводится в основном к схематизации геометрии реального объекта, системы сил, приложенных к элементу конструкции, и свойств материала. В сопротивлении материалов все многообразие форм элементов конструкций сведено к трем геометрическим схемам: брус, оболочка и массив.

Брусом называется тело, одно из измерений которого (длина) значительно превышает два других. В простейшем случае брус как геометрическое тело может быть получен перемещением плоской фигуры вдоль некоторой кривой (рис. 2.2) таким образом, чтобы центр тяжести фигуры оставался на этой кривой, а плоскость была нормальна к ней. Кривая, вдоль которой перемещается центр тяжести плоской фигуры, называется *осью бруса*, а плоская фигура — его *поперечным сечением*. В зависимости от формы оси брус может быть прямым, кривым или пространственно изогнутым. Примером последнего может служить винтовая пружина (см. § 2.18). Кроме брусьев с неизменным поперечным сечением вдоль всей оси могут быть брусья с непрерывно изменяющимися сечениями (рис. 2.3, а) или с сечениями, форма и площадь которых меняется скачками (рис. 2.3, б), последние называются ступенчатыми брусьями.

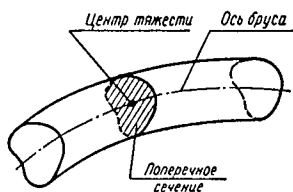


Рис. 2.2

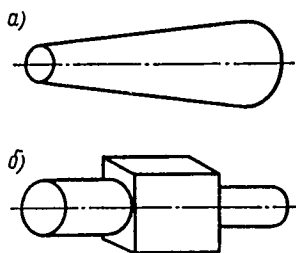


Рис. 2.3

К *оболочкам* относят тела, одно из измерений которых (толщина) во много раз меньше двух других размеров. Примером оболочек могут служить стенки баков, цистерн, корпуса ракет и т. п.

Массивом считается тело, все три размера которого имеют один порядок.

§ 2.2. Классификация нагрузок

Выше (см. § 2.1) говорилось о том, что деформирование элементов конструкции происходит вследствие действия на них внешних сил. Из теоретической механики известно, что равновесная система внешних сил состоит из активных сил и реакций связей. Такую систему сил принято называть *нагрузкой*. Нагрузки классифицируют по двум признакам — способу их приложения к элементу конструкции и характеру действия на него.

По способу их приложения к телу нагрузки делятся на поверхностные и объемные. *Поверхностные силы* приложены к участкам поверхности и характеризуют непосредственное контактное взаимодействие рассматриваемого элемента конструкции с окружающими телами. В свою очередь, поверхностные силы делятся на распределенные (см. § 1.17) и сосредоточенные. В буквальном смысле сосредоточенных сил нет, это схематизация. Считая силу сосредоточенной, условно пренебрегают размерами площади взаимодействия соприкасающихся тел. Силы, распределенные по объему тела, такие, как силы тяжести, магнитные силы и силы инерции, относятся к *объемным силам*.

По характеру действия на тело нагрузки делятся на статические, повторно-переменные и динамические (ударные).

К *статическим* нагрузкам относятся такие, которые медленно возрастают от нуля и, достигнув некоторого конечного значения, далее остаются неизменными. Примером статической объемной нагрузки может служить система центробежных сил инерции, действующая на ротор электродвигателя в период его разгона и при дальнейшем равномерном вращении.

К *повторно-переменным* (циклическим) относятся нагрузки, многократно изменяющиеся во времени по

какому-либо периодическому закону. К таким нагрузкам, в частности, относятся силы, действующие на зубья зубчатого колеса.

К *динамическим* (ударным) относятся нагрузки, прикладываемые внезапно или даже с некоторой скоростью в момент контакта. Примером такой нагрузки может служить сила, приложенная к телу в момент падения на него другого тела (забивание свай с помощью копра и т. д.).

§ 2.3. Основные допущения

Для того чтобы наука о сопротивлении материалов могла рекомендовать общие теоретические основы расчета элементов конструкций, выполняемых из разнообразных материалов, необходимо исходить из ряда допущений об их свойствах, а также из допущений о характере деформаций.

Допущения о свойствах материалов:

1. Материал *однороден*, т. е. его свойства не зависят от размеров выделенного из тела объема. В действительности однородных материалов в природе нет. Например, структура металлов состоит из множества хаотически расположенных микроскопически мелких кристаллов (зерен). Размеры же рассчитываемых элементов конструкций, как правило, неизмеримо превышают размеры кристаллов, поэтому допущение об однородности материала здесь полностью применимо.

2. Материал представляет собой *сплошную среду* и непрерывно заполняет весь предоставленный ему объем. Это допущение вытекает непосредственно из первого — об однородности материала — и позволяет применять математический анализ.

3. Материал *изотропен*, т. е. физико-механические свойства одинаковы по всем направлениям. Таким образом, выделенный из сплошной среды элемент не зависит от ориентации относительно выбранной системы координат. Металлы благодаря своей мелкозернистой структуре считаются изотропными. Но есть много неизотропных — анизотропных — материалов. К ним относятся древесина, ткани, фанера, многие пластмассы. Однако в сопротивлении материалов рассматриваются в основном материалы изотропные.

4. Материал в определенных пределах нагружения тела обладает *идеальной упругостью*, т. е. после снятия нагрузки тело полностью восстанавливает первоначальные формы и размеры.

Допущения о характере деформирования элементов конструкций:

1. Перемещения точек элемента конструкции, обусловленные его упругими деформациями, незначительны по сравнению с размерами самого тела. Согласно этому допущению, деформированный элемент конструкции (или вся конструкция целиком) несущественно отличается от недеформированного. Поэтому при составлении уравнений равновесия сил, действующих на деформированное тело, можно пренебрегать теми изменениями, которые произошли в расположении сил (см. рис. 2.1, б, в), т. е. следует исходить из первоначальной формы тела (элемента конструкции) и его начальных размеров. Это положение кратко называется *принципом начальных размеров*.

2. Перемещения точек упругого тела в известных пределах нагружения прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения. Например, если сила F вызвала перемещение точки B на расстояние δ (рис. 2.4, а), то сила $2F$ вызовет перемещение точки B на расстояние 2δ (рис. 2.4, б). Конструкции, для которых справедливо это допущение, называются *линейно-деформируемыми*.

3. Для линейно-деформируемых конструкций справедлив известный из теоретической механики *принцип независимости действия сил* — результат действия нескольких сил не зависит от последова-

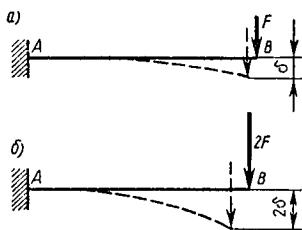


Рис. 2.4

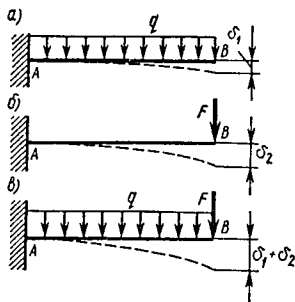


Рис. 2.5

тельности нагружения ими данной конструкции и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности. Следовательно, если под действием равномерно распределенной силы точка B бруса (рис. 2.5, a) переместится на расстояние δ_1 , а под действием сосредоточенной силы (рис. 2.5, b) — на расстояние δ_2 , то при одновременном действии обеих сил перемещение точки B равно сумме перемещений δ_1 и δ_2 (рис. 2.5, $в$).

§ 2.4. Метод сечений. Виды нагружений

Растягивая руками резиновый жгут или сгибая толстую стальную проволоку, мы ощущаем сопротивление этих тел; иногда силы наших рук оказывается недостаточно, чтобы еще более растянуть жгут или изогнуть проволоку. Способность тела сопротивляться изменению первоначальной формы определяется силами сцепления между всеми смежными частицами тела, которые в отличие от внешних сил, приложенных к телу, называются *внутренними силами*. Внутренние силы (иногда их называют силами упругости), как показывают опыты, возрастают вместе с увеличением нагрузок, но до известного предела, после чего сцепление между частицами тела прекращается и тело разрушается.

Чтобы правильно рассчитать конструкцию на прочность или на жесткость, необходимо уметь определять внутренние силы по нагрузке. Для выявления внутренних сил в сопротивлении материалов применяется *метод сечений*, суть которого заключается в следующем.

Рассечем мысленно брус, нагруженный уравновешенной системой сил F_k (рис. 2.6, a), поперечным сечением A на части I и II и отбросим одну из них, например часть II . Чтобы сохранить равновесие оставшейся части бруса (рис. 2.6, b), заменим действие на нее отброшенной части системой сил, которые являются внутренними для целого бруса и внешними по отношению к отсеченной части. В результате приведения этой системы сил (см. § 1.13) к центру тяжести сечения получим главный вектор $F_{гл}$ и главный момент $M_{гл}$ (рис. 2.6, $в$). Выберем систему координатных осей x, y, z таким образом, чтобы ось x была направлена перпендикулярно сечению, т. е.

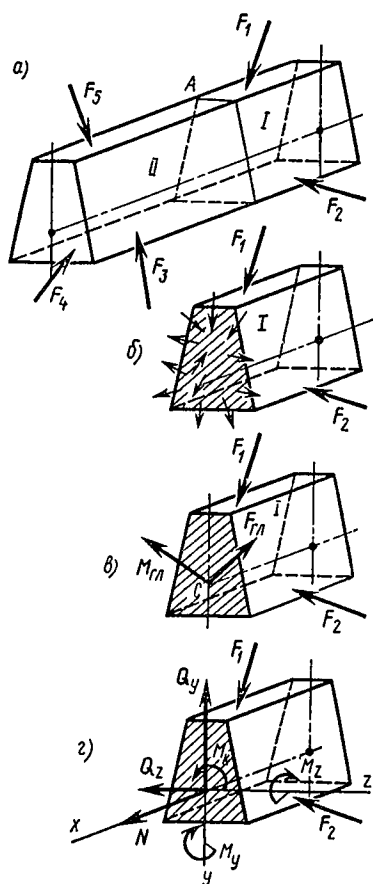


Рис. 2.6

совпадала с осью бруса, а оси y и z располагались в плоскости сечения, причем одна из осей (ось y) совпадала с ее осью симметрии (рис. 2.6, г). Разложив главный вектор и главный момент на составляющие по выбранным осям, получим три силы N , Q_y , Q_z и три момента M_x , M_y , M_z , которые в совокупности называются *внутренними силовыми факторами*.

Шесть внутренних силовых факторов вместе с известными внешними силами на оставшейся части бруса образуют уравновешенную систему сил, для которой можно составить шесть уравнений равновесия. Легко видеть, что в каждое из этих уравнений

входит один из неизвестных внутренних силовых факторов. Поэтому, решая уравнения, найдем

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum F_{kx}; & M_k &= \sum M_x(F_k); \\ Q_y &= \sum F_{ky}; & M_y &= \sum M_y(F_k); \\ Q_z &= \sum F_{kz}; & M_z &= \sum M_z(F_k). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Составляющая N главного вектора внутренних сил, направленная перпендикулярно плоскости поперечного сечения бруса, называется *нормальной (продольной) силой*. Составляющие Q_y и Q_z , лежащие в плоскости поперечного сечения, называются *поперечными силами*. Составляющий главный момента внутренних сил момент M_k , возникающий в плоскости поперечного сечения бруса, называется *крутящим моментом*. Составляющие моменты M_y и M_z , возникающие в плоскостях, перпендикулярных поперечному сечению бруса, называются *изгибающими моментами*.

Из равенства (2.1) следует, что: нормальная сила N равна алгебраической сумме проекций на ось x внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса; каждая из поперечных сил (Q_y и Q_z) равна алгебраической сумме проекций на соответствующую ось внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса; крутящий момент M_k равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на рассматриваемую часть бруса, относительно нормальной к сечению оси x ; каждый из изгибающих моментов M_y и M_z равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса, относительно осей y или z соответственно.

Правила определения знаков проекций или моментов внешних сил при их алгебраическом сложении сформулированы далее в соответствующих главах.

По аналогии с приведенными наименованиями внутренних силовых факторов производится *классификация видов нагружения бруса*. Так, если в поперечных сечениях бруса возникает только нормальная сила N , то брус *растянут* (сила N направлена от сечения) или *сжат* (сила N направлена к сечению). Если в поперечном сечении возникает только момент M_k , то брус в данном сечении

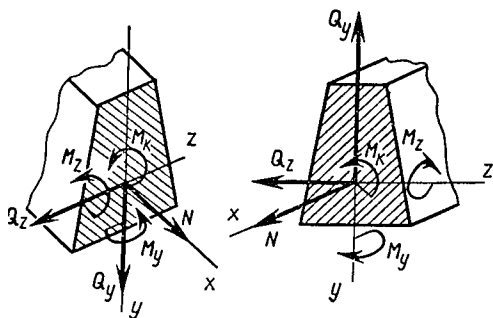


Рис. 2.7

работает на *кручение*. Если в поперечном сечении возникает только изгибающий момент M_z (или M_y), то происходит *чистый изгиб*. Если в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом (например, M_z) возникает и поперечная сила Q_y , то это *поперечный изгиб*. Возможны случаи, когда брус работает на кручение и изгиб или растяжение одновременно.

Таким образом, метод сечений позволяет определить внутренние силовые факторы и виды нагружения. Практически метод сечений сводится к выполнению следующих операций:

- 1) разрезаем брус на две части;
- 2) отбрасываем одну из частей (целесообразно отбросить часть, на которую действует большее число внешних сил, или часть, содержащую заделку);
- 3) заменяем действие отброшенной части на оставленную шестью внутренними силовыми факторами;
- 4) определяем значения внутренних силовых факторов из условий равновесия для отсеченной части бруса;
- 5) устанавливаем вид нагружения.

Как говорилось выше, внутренние силы определяют взаимодействие между частями бруса, причем это взаимодействие подчиняется аксиоме статики о равенстве действия и противодействия. Поэтому внутренние силовые факторы, возникающие в сечении справа, равны внутренним силовым факторам в сечении слева, но направлены в противоположные стороны (рис. 2.7).

§ 2.5. Напряжения

Метод сечений позволяет выявить внутренние силовые факторы. Но для оценки прочности необходимо уметь определять внутренние силы в любой точке сечения рассматриваемого бруса. Поэтому введем числовую меру интенсивности внутренних сил — *напряжение*.

Рассмотрим брус, к которому приложена некоторая нагрузка. Брус под действием нагрузки находится в равновесии. Применяя метод сечений, рассечем брус поперечной плоскостью, отбросим левую часть бруса, заменим действие отброшенной части на рассматриваемую системой внутренних сил. Выделим вокруг произвольной точки малую площадку ΔA (рис. 2.8, а). Равнодействующую внутренних сил в пределах этой площадки обозначим ΔF . Отношение

$$\Delta F / \Delta A = p_{\text{ср}} \quad (2.2)$$

называется средним напряжением по площадке ΔA . Вектор среднего напряжения совпадает по направлению с вектором равнодействующей ΔF .

При постепенном уменьшении площадки ΔA изменяются как модуль, так и направление равнодействующей внутренних сил ΔF , а следовательно, вектор $p_{\text{ср}}$ постепенно приближается к истинному значению напряжения p в заданной точке (рис. 2.8, б). Числовое значение этого напряжения выражается равенством

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta F / \Delta A. \quad (2.3)$$

Согласно формулам (2.2) и (2.3), единицей напряжения служит единица силы, деленная на единицу площади. В Международной системе единиц (СИ) единица силы — Н, единица площади — м^2 , значит единица напряжения в этой системе — $\text{Н}/\text{м}^2$, назван-

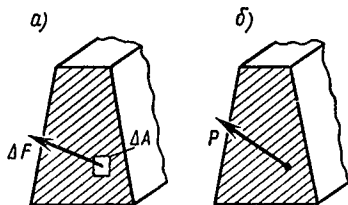


Рис. 2.8

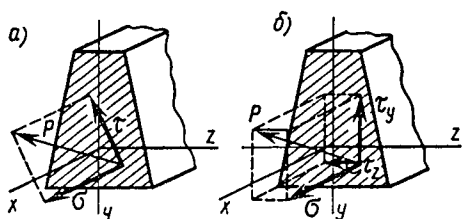


Рис. 2.9

ная паскалем, т. е. $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Паскаль — очень мелкая единица напряжения, поэтому более употребительной единицей является мегапаскаль: $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$.

Вектор \mathbf{p} полного напряжения в точке сечения можно разложить на два составляющих вектора: σ и τ (рис. 2.9, а). Вектор σ , направленный перпендикулярно сечению, называется *нормальным напряжением*. Вектор τ , лежащий в плоскости сечения, называется *касательным напряжением*. Поскольку векторы σ и τ взаимно перпендикулярны, зависимость между числовыми значениями напряжений p , σ и τ выражается формулой

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (2.4)$$

Чаше оказывается целесообразным, сообразуясь с выбранными осями координат x , y , z (рис. 2.9, б), разложить вектор \mathbf{p} не на два, а на три составляющих вектора: σ (нормальное напряжение), параллельный оси x , τ_y и τ_z (касательные напряжения), параллельные соответственно осям y и z . В этом случае

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \quad (2.5)$$

Между внутренними силовыми факторами (см. § 2.4) и напряжениями σ , τ_y и τ_z существуют определенные зависимости, к установлению которых мы перейдем в следующих главах. Здесь же заметим следующее.

Наличие нормального напряжения σ в любой точке поперечного сечения обусловлено возникновением в этом сечении нормальной силы N или изгибающих моментов M_z и M_y . Наличие касательных напряжений τ или τ_y и τ_z обусловлено внутрен-

ними силовыми факторами, возникающими в плоскости сечения, т. е. поперечными силами Q_y , Q_z или крутящим моментом M_k .

Вопросы для самопроверки

1. Что называется прочностью, жесткостью и устойчивостью детали (конструкции)?

2. По каким признакам и как классифицируются нагрузки в сопротивлении материалов?

3. Какова цель применения метода сечений? Укажите в процессе применения этого метода последовательность операций.

4. С какими внутренними силовыми факторами связано возникновение в поперечных сечениях бруса нормальных напряжений и с какими — касательных напряжений?

ГЛАВА 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 2.6. Нормальные силы и напряжения в поперечном сечении бруса

Вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — нормальная сила N , называется *растяжением или сжатием*. Прямой брус, работающий на растяжение (сжатие), называется *стержнем*.

Брус растянут, если внешние силы F , приложенные к его концам, действуют вдоль оси бруса и направлены в стороны от бруса (рис. 2.10, а). При действии осевых нагрузок F , направленных к брусу, он сжат (рис. 2.10, б). При таких нагружениях в поперечных сечениях возникает только продольная сила N . Действительно, если согласно методу сечений разрезать растянутый брус и отбросить, например, его левую часть (рис. 2.10, в), то для уравнивания внешней силы F достаточно в сечении приложить только один внутренний силовой фактор — нормальную силу N , направив ее по оси x от сечения. Согласно первому из уравнений (2.1),

$$N = \sum F_{kx} = F.$$

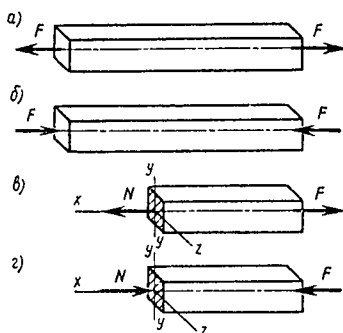


Рис. 2.10

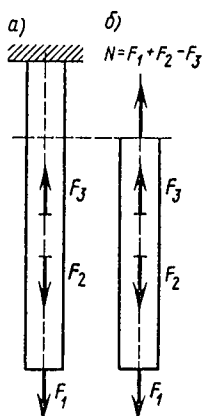


Рис. 2.11

Остальные внутренние силовые факторы в данном случае равны нулю (проекция силы \mathbf{F} на ось y и на ось z равны нулю и моменты силы \mathbf{F} относительно каждой из осей x , y , z также равны нулю). Поэтому нормальная сила N есть равнодействующая внутренних сил в данном сечении. Аналогичный результат получим, разрезав сжатый брус (рис. 2.10, г), с той лишь разницей, что в последнем случае нормальная сила $N = F$ направлена к сечению.

Если брус нагружен не двумя, как на рис. 2.10, а, а большим числом осевых сил и по одну сторону от выбранного сечения имеются силы, направленные в противоположные стороны (рис. 2.11, б), то целесообразно договориться о правиле знаков для проекций внешних сил при определении нормальной силы в сечении: *проекции внешних сил, направленных от сечения, положительны и, наоборот, проекции внешних сил, направленных к сечению, отрицательны.*

Это правило справедливо для любой оставленной части бруса — правой или левой (при горизонтальном положении бруса), нижней или верхней (при вертикальном расположении бруса).

Если в результате алгебраического сложения проекции внешних сил получилось, что $N > 0$, то нормальная сила направлена от сечения и брус в этом сечении испытывает растяжение; при значении $N < 0$ нормальная сила направлена к сечению и брус

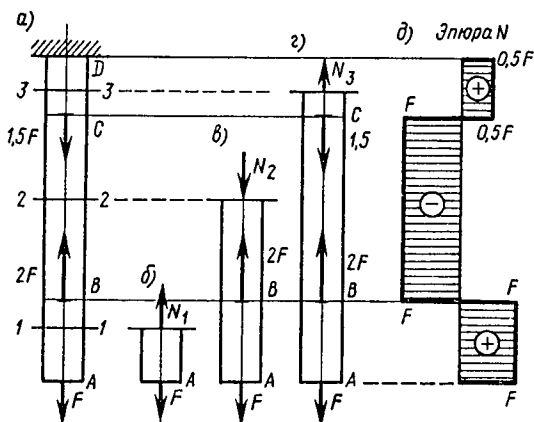


Рис. 2.12

испытывает сжатие. В тех случаях, когда при переходе от одного сечения к другому нормальная сила изменяется, строят график изменения значения нормальной силы N по длине бруса. Такие графики называются *эпюрами*.

Построение эпюры нормальных сил рассмотрим на конкретном примере.

Пример 2.1. Защемленный в сечении D брус нагружен в сечениях A , B и C осевыми силами, как показано на рис 2.12, *а*. Пренебрегая силой тяжести бруса, определить нормальные силы по всей длине бруса и построить их эпюру.

Решение. 1. Сечениями A , B и C , в которых приложены нагрузки, брус разделен на три участка: AB , BC и CD .

2. Разрежем брус по некоторому сечению $1-1$ на участке AB . Отбросив верхнюю часть (рис. 2.12, *б*), определим в сечении $1-1$ нормальную силу, обозначив ее N_1 . На оставленную часть бруса действует только одна сила F , направленная от сечения $1-1$. Согласно принятому правилу знаков, ее проекцию на ось бруса считаем положительной. Поэтому

$$N_1 = F.$$

Нормальная сила $N_1 > 0$, значит вектор N_1 нужно направить от сечения $1-1$. Сечение $1-1$ может быть выбрано в любом месте на участке AB ; следовательно, нормальная сила на этом участке постоянна, а брус на участке AB растянут.

3. Разрежем брус по некоторому сечению $2-2$ на участке BC , отбросив верхнюю часть (рис. 2.12, *в*), и обозначим N_2 искомую нормальную силу. На оставленную нижнюю часть бруса действуют две силы. Проекция силы F положительна (сила направлена от сечения), а проекция силы $2F$ отрицательна ($2F$ направлена к сечению $2-2$). Поэтому

$$N_2 = F - 2F = -F.$$

Нормальная сила $N_2 < 0$, значит вектор N_2 направлен к сечению 2—2 и брус на участке BC сжат.

4. Разрежем брус по сечению 3—3 на участке CD . Отбросив верхнюю часть (отбрасываем каждый раз верхнюю часть потому, что реакция заделки в сечении D неизвестна), находим нормальную силу N_3 в сечении 3—3 (рис. 2.12, z):

$$N_3 = F - 2F + 1,5F = 0,5F,$$

$N_3 > 0$, значит вектор N_3 следует направить от сечения 3—3, а участок CD бруса растянут.

5. Переходим к построению эпюры N (рис. 2.12, d). Для этого параллельно оси бруса проводим тонкую начальную, или базовую, линию, перпендикулярно которой в определенном масштабе вправо откладываем отрезки, изображающие положительные значения продольной силы, а влево — отрицательные. Получившаяся ступенчатая фигура, ограниченная основной линией и заштрихованная перпендикулярно базовой линии, и есть искомая эпюра нормальных сил по длине бруса. «Читая» эпюру на рис. 2.12, d , например, сверху вниз, видим: на участке DC брус растянут, нормальная сила, равная $0,5F$, постоянна до сечения C (эпюра N на участке параллельна базовой линии); при переходе через сечение C эпюра делает «скачок», равный абсолютному значению приложенной в этом сечении силы; правая (положительная) часть скачка $(+0,5F)$ изображает значение нормальной силы чуть выше сечения C , а левая (отрицательная) часть скачка $(-F)$ изображает значение нормальной силы чуть ниже сечения C (т. е. относится к участку CB), а далее постоянное значение нормальной силы $-F$ сохраняется во всех поперечных сечениях бруса вплоть до сечения B ; при переходе через сечение B эпюра снова испытывает скачок от значения $-F$ до $+F$, характеризующий переход от сжатого участка CB к растянутому BA . Абсолютное значение скачка равно силе $2F$, приложенной к брусу в этом сечении. В заключение заметим, что скачки на эпюрах всегда по абсолютному значению равны модулям внешних сил, приложенных в этом месте к брусу.

Переходим теперь к определению напряжений в поперечных сечениях бруса.

Эта задача решается на основе *гипотезы плоских сечений*, высказанной Я. Бернулли старшим (1654—1705). Применительно к рассматриваемому виду нагружения гипотеза гласит: перпендикулярное оси недеформированного бруса плоское сечение A (рис. 2.13, a) остается таким же плоским и перпендикулярным оси и при растяжении (сжатии) бруса (рис. 2.13, b). Исходя из того что в растянутом (сжатом) брусе поперечные сечения остаются па-

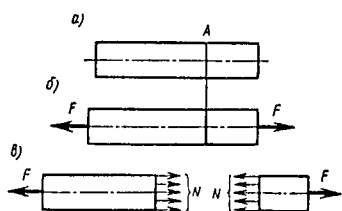


Рис. 2.13

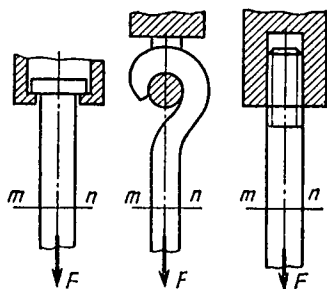


Рис. 2.14

параллельными друг другу, естественно предположить, что внутренние силы распределены по сечению равномерно (рис. 2.13, в), а так как нормальная сила N является равнодействующей внутренних сил в поперечном сечении, нормальное напряжение в любой точке сечения

$$\sigma = N/A, \quad (2.6)$$

где A — площадь поперечного сечения. Нормальное напряжение направлено так же, как и нормальная сила: при растяжении бруса — от сечения, при сжатии — к сечению.

Рассматривая растяжение бруса осевыми силами, приложенными к его торцам, мы не касались вопроса о том, каким способом растягивающие силы приложены к брусу. При любом из способов (рис. 2.14) вблизи закреплений брус испытывает более сложный вид нагружения, чем простое растяжение. Вместе с тем теоретические соображения, подтверждаемые экспериментальными исследованиями, показывают, что особенности приложения внешних сил к растянутому брусу влияют на распределение напряжений в его поперечных сечениях только вблизи места нагружения.

В поперечных сечениях $m-n$ (рис. 2.14) на расстоянии, превышающем их наибольшие размеры, при определении нормальных напряжений достаточно принимать во внимание только значение заданной осевой силы F и площадь сечения A .

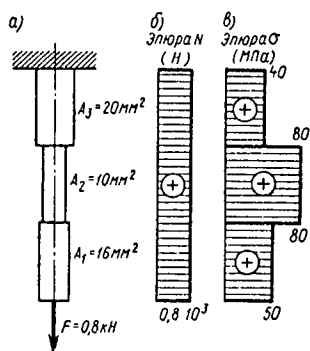


Рис. 2.15

(см. пример 2.1), либо из-за изменения площади поперечных сечений, то строят эпюру нормальных напряжений (эпюра σ), которая наглядно характеризует напряженное состояние бруса по всей его длине.

При практических расчетах, связанных с определением напряжений в сечениях бруса, вместо единицы напряжений $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ удобнее использовать внесистемную единицу 1 Н/мм^2 , численно равную 1 МПа ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 10^6 \text{ Н/м}^2 = 10^6 \text{ Н/1 м}^2 = 10^6 \text{ Н/10}^6 \text{ мм}^2 = 1 \text{ Н/мм}^2$), так как в технических расчетах размеры поперечных сечений рассчитываемых деталей машин, как правило, выражают в миллиметрах. Учитывая это обстоятельство, значение модуля упругости E будем в дальнейшем выражать не в МПа, а в Н/мм^2 .

Пример 2.2. Трехступенчатый брус с площадями поперечных сечений ступеней A_1 , A_2 и A_3 нагружен силой F , как показано на рис. 2.15, а. Определить нормальные напряжения в поперечных сечениях и построить эпюру σ по длине бруса.

Решение. 1. Брус растянут силой $F = 0,8 \text{ кН} = 0,8 \cdot 10^3 \text{ Н}$. Применяя метод сечений, определяем, что в любом сечении бруса $N = F = 0,8 \cdot 10^3 \text{ Н}$. Эпюра N изображена на рис. 2.15, б.

2. Площади поперечных сечений ступеней заданы. Подставляя их значения в формулу (2.6), находим нормальные напряжения:

в поперечном сечении нижней ступени

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{16} = 50 \text{ Н/мм}^2 = 50 \text{ МПа};$$

Это положение известно как **принцип Сен-Венана** * в применении к растяжению (сжатию) бруса.

Применяя этот принцип в дальнейшем, мы не будем принимать во внимание конкретный способ приложения к брусу внешних сил.

Если нормальные напряжения в разных сечениях бруса не одинаковы либо из-за изменения нормальных сил вдоль оси бруса

* Барре де Сен-Венан (1797—1886) французский ученый, член Парижской Академии наук.

в поперечном сечении средней ступени

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_2} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{10} = 80 \text{ Н/мм}^2 = 80 \text{ МПа};$$

в поперечном сечении верхней ступени

$$\sigma_3 = \frac{N}{A_3} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{20} = 40 \text{ Н/мм}^2 = 40 \text{ МПа}.$$

3. Эпюра нормальных напряжений по всей длине бруса изображена на рис. 2.15, в.

Построение эпюры не может вызвать затруднений. Нормальные напряжения в поперечных сечениях одной ступени не изменяются. Поэтому эпюра σ для каждой ступени изображается отрезком, параллельным базовой линии; расстояния между этими отрезками и базовой линией пропорциональны нормальным напряжениям в сечениях ступеней.

§ 2.7. Перемещения и деформации. Закон Гука

При растяжении бруса его первоначальная длина l увеличивается на Δl (рис. 2.16, а), а первоначальный поперечный размер d уменьшается на Δd (рис. 2.16, б). Величина Δl называется *абсолютным удлинением бруса*, а величина Δd — *абсолютным поперечным сужением*. При сжатии бруса его длина укорачивается на Δl , а поперечный размер увеличивается на Δd . Рассматривая любую из этих величин как разность между начальным (до нагружения) и конечным (после нагружения) размерами, им следует приписывать противоположные знаки: при растяжении бруса $\Delta l > 0$, $\Delta d < 0$, при сжатии $\Delta l < 0$, $\Delta d > 0$.

О степени деформирования бруса нельзя судить по значениям Δl или Δd , так как последние зависят не только от внешних сил, но и от начальных размеров бруса. Деформирование бруса при растяжении (сжатии) характеризуют величины

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta l}{l} \quad (2.7)$$

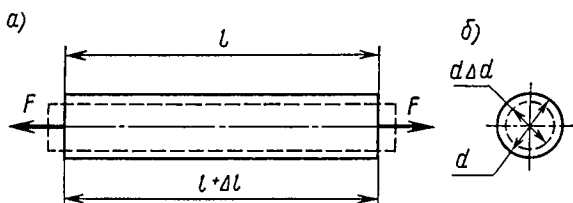


Рис. 2.16

и

$$\varepsilon' = \mp \frac{\Delta d^*}{d}, \quad (2.8)$$

где ε — продольная деформация; ε' — поперечная деформация бруса. Из формул (2.7) и (2.8) видно, что ε и ε' — величины безразмерные.

Экспериментально доказано, что продольная и поперечная деформации пропорциональны друг другу, т. е.

$$|\varepsilon'| = \mu |\varepsilon|, \quad (2.9)$$

где зависящий от материала коэффициент пропорциональности μ называется *коэффициентом Пуассона* **. Его значение для разных материалов колеблется в пределах 0...0,5; у пробки $\mu = 0$ (при растяжении или сжатии пробочного брусочка его поперечные размеры практически не изменяются); у каучука (резины) значение μ близко к 0,5 (при растяжении резинового бруса его поперечные размеры заметно уменьшаются, при сжатии — заметно увеличиваются); для стали $\mu = 0,25...0,3$.

В пределах упругих деформаций между нормальным напряжением и продольной деформацией существует прямо пропорциональная зависимость, носящая название *закона Гука*:

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (2.10)$$

Коэффициент пропорциональности E называется модулем упругости, и его значение выражается в единицах напряжения, так как ε — величина безразмерная.

Значения E для некоторых материалов (МПа):

Стали всех марок	$2,1 \cdot 10^5$
Медь техническая	$1,2 \cdot 10^5$
Бронза оловянистая	$1 \cdot 10^5$
Алюминиевые сплавы	$0,7 \cdot 10^5$
Каучук (резина)	$7,85 \approx 8$

Модуль упругости характеризует жесткость материала, т. е. способность сопротивляться дефор-

* Если поперечное сечение бруса — прямоугольник с размерами $a \times b$, то $\varepsilon' = |\Delta a/a| = |\Delta b/b|$.

** Французский ученый С. Д. Пуассон (1781—1840) внес крупный вклад в науку о прочности.

мациям: согласно закону Гука [см. формулу (2.10)], при одних и тех же значениях нормального напряжения в поперечных сечениях брусков их продольные деформации ε тем меньше, чем больше модуль упругости E .

Если в равенстве (2.10) заменить ε выражением из формулы (2.7)

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l},$$

то получим выражение

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E}. \quad (2.11)$$

Заменив здесь σ его выражением из формулы (2.6), получим

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}. \quad (2.12)$$

Стоящее в знаменателе произведение AE называется жесткостью сечения бруса при растяжении (сжатии), а выражение AE/l — жесткостью бруса или отдельного его участка при растяжении.

При решении некоторых практических задач возникает необходимость наряду с удлинениями при растяжении (сжатии) учитывать также и температурные удлинения $\Delta l_t = \alpha l t$, где α — коэффициент линейного расширения материала. В этом случае

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t$$

и

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE} + \alpha l t. \quad (2.13)$$

Пример 2.3. Определить полное удлинение бруса, рассмотренного в примере 2.2 (см. рис. 2.15), если длины ступеней бруса $l_1 = l_2 = l_3 = 200$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. 1. При решении задачи в примере 2.2 построена эпюра (см. рис. 2.15, в), из которой видно, что в поперечном сечении верхней ступени $\sigma_3 = 40$ Н/мм², средней ступени $\sigma_2 = 80$ Н/мм² и нижней $\sigma_1 = 50$ Н/мм². Длины ступеней и модуль упругости известны. Поэтому для определения удлинения ступеней бруса целесообразно воспользоваться формулой (2.11).

2. Так как $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^5$ Н/мм², $l_1 = l_2 = l_3 = 200$ мм, то удлинения ступеней бруса равны:

верхней

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{40 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,04 \text{ мм};$$

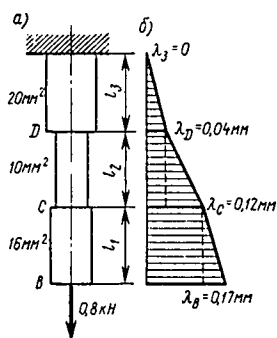


Рис. 2.17

Перемещение сечения в заделке равно нулю, т. е. $\lambda_3 = 0$; перемещение сечения D равно удлинению верхней ступени бруса, т. е. $\lambda_D = \Delta l_3 = 0,04$ мм; перемещение сечения C равно сумме удлинений верхней и средней ступеней бруса, т. е. $\lambda_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0,04 + 0,08 = 0,12$ мм; перемещение сечения B равно сумме удлинений всех трех ступеней, иначе говоря, полному удлинению бруса Δl , т. е. $\lambda_B = \Delta l = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,04 + 0,08 + 0,05 = 0,17$ мм.

Соединив концы отрезков, изображающих перемещения рассмотренных сечений прямыми, получим эпюру перемещений по всей длине бруса (рис. 2.17, б).

средней

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{80 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,08 \text{ мм};$$

нижней

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{50 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,05 \text{ мм}.$$

3. Определив удлинения ступеней, можно построить эпюру перемещений сечений. Для этого рядом с чертежом бруса (рис. 2.17, а) параллельно его оси проводим базовую линию, а перемещения сечений изображаем ей перпендикулярно отрезками, взятыми в определенном масштабе.

§ 2.8. Напряженное состояние при одноосном растяжении

Напряженное состояние в точке характеризуется всем бесчисленным множеством нормальных и касательных напряжений, возникающих на площадках, которые можно провести через эту точку.

Для исследования напряженного состояния бруса при растяжении силами, действующими вдоль его оси (одноосное растяжение), выберем какую-либо точку B (рис. 2.18, а) и изобразим ее в виде малого элемента в форме прямоугольного параллелепипеда отдельно от бруса (рис. 2.18, б). Если предположить, что брус состоит из бесконечно большого числа очень тонких продольных волокон и считать, что все эти волокна не надавливают друг на друга, а только растягиваются (гипотеза о ненадавливании волокон), то можно сделать вывод, что на гранях параллелепипеда, параллельных поперечным сечениям бруса, возникают только нормальные напряжения σ , остальные грани от напряжений свободны.

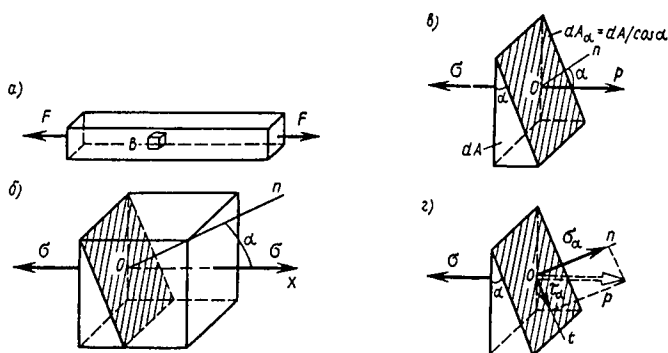


Рис. 2.18

Разрежем выделенный элемент по сечению (на рис. 2.18, б оно заштриховано), нормаль On к которому образует с осью x угол α , и отбросим часть элемента правее сечения. Оставленная левая часть (рис. 2.18, в) сохраняет равновесие, так как сила σdA , действующая на перпендикулярную оси x площадку dA , уравнивается силой $p dA_\alpha$, действующей на наклоненную к оси x площадку $dA_\alpha = dA / \cos \alpha$, т. е.

$$\sigma dA = p dA / \cos \alpha.$$

Следовательно, возникшее на наклонной площадке полное напряжение

$$p = \sigma \cos \alpha. \quad (2.14)$$

Разложив напряжение p на две составляющие по нормали On и касательной Ot к наклонной площадке (рис. 2.18, з), находим

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha \text{ и } \tau_\alpha = p \sin \alpha.$$

Подставим сюда вместо p его значение из уравнения (2.14) и с учетом того, что $\sin \alpha \cos \alpha = 0,5 \sin 2\alpha$, получим:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (2.15)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.16)$$

Таким образом, зная нормальное напряжение σ в поперечном сечении растянутого (сжатого) бруса, можно по формулам (2.15) и (2.16) определить нормальное σ_α и касательное τ_α напряжения в сечении бруса, наклоненном к оси бруса под любым углом α .

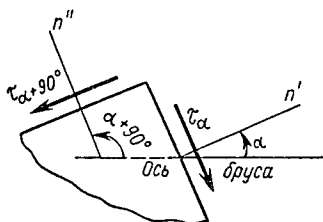


Рис. 2.19

Из формул (2.15) и (2.16) следует:

а) при $\alpha = 0^\circ$ (поперечное сечение бруса)

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 0^\circ = 1; \quad \sin 2\alpha = \sin 0^\circ = 0,$$

т. е. $\sigma_0 = \sigma$, $\tau_0 = 0$;

б) при $\alpha = 90^\circ$ (продольное сечение бруса)

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 90^\circ = 0; \quad \sin 2\alpha = \sin 180^\circ = 0,$$

т. е. $\sigma_{90} = 0$, $\tau_{90} = 0$;

в) при $\alpha = 45^\circ$ $\cos^2 \alpha = \cos^2 45^\circ = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$,

$$\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1, \quad \text{т. е. } \sigma_{45} = \sigma/2, \quad \tau_{45} = \sigma/2.$$

Значит, при одноосном растяжении максимальное нормальное напряжение $\sigma_{\max} = \sigma = N/A$ возникает в поперечных сечениях бруса; максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = \tau_{45} = \sigma/2$ возникает в сечениях, наклоненных к оси бруса под углом 45° .

Кроме того, из равенства (2.16) следует, что переход от произвольной площадки с наклоном α к площадке с наклоном $\alpha + 90^\circ$ (рис. 2.19) никак не отражается на абсолютном значении касательных напряжений. Действительно, если

$$\begin{aligned} |\tau_\alpha| &= \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right|, \quad \text{то} \quad |\tau_{\alpha+90}| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) \right| = \\ &= \left| \frac{\sigma}{2} \sin (2\alpha + 180^\circ) \right| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right| = |\tau_\alpha|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha+90}|.$$

Это равенство выражает **закон парности касательных напряжений**: касательные напряжения, возникаю-

щие в двух взаимно перпендикулярных площадках, равны друг другу по модулю и направлены либо от ребра, либо к ребру, образуемому площадками.

§ 2.9. Статические испытания материалов. Основные механические характеристики

При выборе материала для какого-либо элемента конструкции в последующих расчетах необходимо знать механические свойства материала, определяющие его прочность, упругость, твердость и пластичность. Необходимые сведения о различных механических свойствах материалов получают экспериментально в процессе механических испытаний на растяжение, сжатие, срез, кручение и изгиб.

Самыми распространенными являются испытания на растяжение. Для них из испытуемого материала изготавливают стандартные образцы, один из которых изображен на рис. 2.20. Образцы испытывают на разрывных машинах, где осевые нагрузки растягивают их и доводят до разрыва. Поведение образцов по мере роста нагрузки фиксируется на бумажной ленте с помощью особого записывающего устройства.

На рис. 2.21 изображена примерная диаграмма, записанная при испытании образца из низкоуглеродистой стали. По оси абсцисс в определенном масштабе зафиксирован рост удлинения Δl образца, а по оси ординат — возникающая в его поперечном сечении нормальная сила N , численно равная осевой нагрузке F , прилагаемой к образцу. Характерные точки на диаграмме отмечены цифрами 1, 2, 3 и 4.

В начале испытания (до отметки 1 с ординатой $N_{\text{пл}}$) удлинение Δl растет пропорционально силе N , тем самым подтверждается справедливость закона Гука. Далее удлинение Δl возрастает непропорционально силе N . При некотором значении нормальной силы N_T (отметка 2) образец удлиняется без увеличения нагрузки. Это явление называется *текучестью металла*.

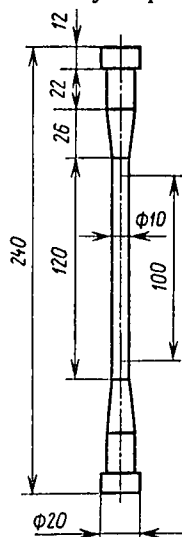


Рис. 2.20

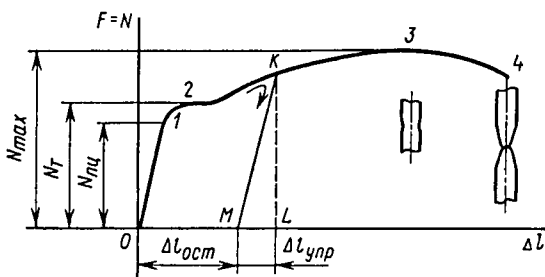


Рис. 2.21

По окончании стадии текучести материал образца снова начинает сопротивляться нагрузке до отметки 3 с ординатой N_{\max} , после которой наблюдается снижение сопротивляемости образца нагрузке. Это обстоятельство объясняется тем, что на образце начинает появляться местное утончение (шейка) и в дальнейшем диаграмма фиксирует уже растяжение не всего образца, а только его участка в зоне образовавшейся шейки. Момент окончательного разрушения образца отмечен цифрой 4.

Если после перехода через стадию текучести, например в момент, отмеченный на диаграмме точкой K (рис. 2.21), образец разгрузить, то процесс разгрузки изобразится отрезком KM , параллельным отрезку в начале испытания. Как видим, после разгрузки остаточное удлинение $\Delta l_{\text{ост}}$ не стало равным удлинению образца, выраженному отрезком OL , а уменьшилось на значение упругого удлинения $\Delta l_{\text{упр}}$. Теперь если этот же образец подвергнуть повторному нагружению, то окажется, что линия нагрузки совпадет с линией MK , т. е. часть диаграммы левее этой линии не повторится. Следовательно, после предварительной вытяжки образца за стадию текучести его материал способен воспринимать большие нагрузки без остаточных деформаций. Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительной вытяжки выше предела текучести называется *наклепом*.

Нормальные силы, возникающие в образце, и его удлинения не могут служить объективными критериями для оценки свойств материала, так как зависят от абсолютных размеров самого образца.

Чтобы получить механические характеристики материала, диаграмму, снятую при испытании образца,

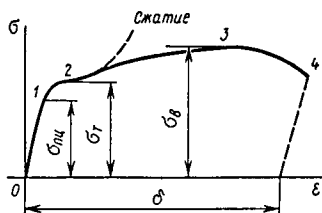


Рис. 2.22

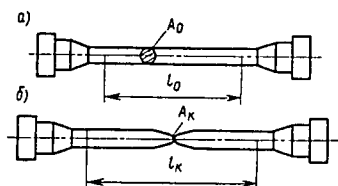


Рис. 2.23

нужно перестроить в *условную диаграмму растяжения** в координатах (ϵ, σ) , не зависящих от абсолютных размеров образца (рис. 2.22). Для этого все абсциссы и ординаты на диаграмме в координатах $(\Delta l, N)$ (см. рис. 2.21) необходимо разделить соответственно на начальную расчетную длину l_0 и начальную площадь поперечного сечения A_0 образца (рис. 2.23, а).

Разделив ординату $N_{пл}$ на A_0 , получим *предел пропорциональности* $\sigma_{пл} = N_{пл}/A_0$, т. е. наибольшее напряжение, до которого справедлив закон Гука; разделив ординату N_T на A_0 , получим *предел текучести* $\sigma_T = N_T/A_0$, т. е. напряжение, при котором происходит рост пластической деформации при неизменной нагрузке; разделив N_{max} на A_0 , получим *предел прочности (временное сопротивление)* $\sigma_B = N_{max}/A_0$, т. е. условное напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, выдерживаемой образцом до разрушения.

При испытании некоторых пластических материалов (среднеуглеродистая сталь, медь, алюминий) на диаграмме растяжения не образуется ясно выраженной стадии текучести (рис. 2.24). Для таких материалов вводится условный предел текучести, равный напряжению, при котором продольная деформация образца $\epsilon = 0,002$, т. е. 0,2%. Условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$. Пластичные свойства материала оцениваются остаточной деформацией при разрыве

$$\delta = \frac{l_K - l_0}{l_0} 100\%,$$

* Диаграмма зависимости напряжения от деформации впервые была построена Я. Бернулли (1654—1705).

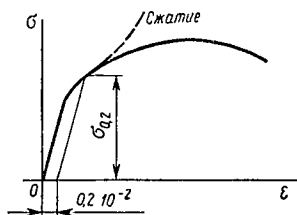


Рис. 2.24

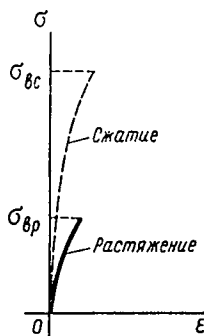


Рис. 2.25

где l_k и l_0 — длины расчетной части образца после разрыва и до начала испытания (см. рис. 2.23, а, б).

При испытании на сжатие пластические материалы до предела текучести ведут себя так же, как и при растяжении, но далее пластическая деформация растет медленнее. Образец постепенно сплющивается. На рис. 2.22 и 2.24 зависимость между σ и ϵ при сжатии образцов показана штриховой линией.

При испытании хрупких материалов (например, чугуновых образцов) установлено, что они способны выдерживать гораздо большие нагрузки при сжатии, чем при растяжении. Вид диаграмм при испытании чугуновых образцов показан на рис. 2.25. Сплошной линией изображена зависимость между σ и ϵ при растяжении, штриховой линией — при сжатии. По этим диаграммам определяют пределы прочности при растяжении ($\sigma_{вр}$) и при сжатии ($\sigma_{вс}$). Для хрупких материалов

$$\sigma_{вс} > \sigma_{вр}.$$

Аналогичная диаграмма, но с более высокими ординатами получается для закаленных сталей.

§ 2.10. Расчеты на прочность

При проектировании элемента конструкции необходимо определить размеры, обеспечивающие его безопасную работу при заданных нагрузках. Для успешного решения этой задачи необходимо исходить из того, чтобы наибольшее расчетное напряжение в поперечном сечении элемента конструкции, возникшее

при заданной нагрузке, было ниже того предельного напряжения, при котором возникает опасность появления пластической деформации или опасность разрушения.

Отношение предельного напряжения $\sigma_{\text{пред}}$ к расчетному σ называется коэффициентом запаса прочности s :

$$s = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma}. \quad (2.17)$$

При расчете элемента конструкции коэффициент запаса прочности задается заранее и называется *нормативным* или *допускаемым* и обозначается $[s]$.

Прочность элемента конструкции обеспечивается, если действительный коэффициент запаса прочности не ниже допускаемого, т. е.

$$s \geq [s]. \quad (2.18)$$

Неравенство (2.18) выражает условие прочности элемента конструкции.

Разделив предельное напряжение на нормативный коэффициент запаса, получим *допускаемое напряжение* $[\sigma]$:

$$\frac{\sigma_{\text{пред}}}{[s]} = [\sigma]. \quad (2.19)$$

Тогда условие прочности можно выразить неравенством

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (2.20)$$

т. е. прочность элемента конструкции обеспечивается, если наибольшее напряжение, возникающее в нем, не превышает допускаемого.

Для пластических материалов как при растяжении, так и при сжатии предельным напряжением является предел текучести $\sigma_{\text{т}}$. Поэтому для них допускаемое напряжение получают исходя из предела текучести $\sigma_{\text{т}}$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{[s]}, \quad (2.21)$$

причем в этом случае $[s] = 1,4 \dots 2$.

Для хрупких материалов допускаемое напряжение растяжения $[\sigma_{\text{р}}]$ и допускаемое напряжение сжатия $[\sigma_{\text{с}}]$ получают исходя из пределов прочности $\sigma_{\text{вр}}$ или $\sigma_{\text{вс}}$:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{ap}}{[s]} \text{ и } [\sigma_c] = \frac{\sigma_{ac}}{[s]}, \quad (2.22)$$

в этом случае $[s] = 2,5 \dots 5$, а иногда и выше.

Условие прочности (2.20) применительно к расчетам на прочность при растяжении (сжатии) записывается в таком виде:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.23)$$

Исходя из этого условия производят три вида расчетов.

Проектный расчет. При этом расчете известны нагрузки, действующие на брус, заданы или выбраны материал, допускаемое напряжение $[\sigma]$ или нормативный запас прочности $[s]$. Размеры поперечного сечения бруса, обеспечивающие требуемую прочность, определяем следующим образом: полагая $\sigma = [\sigma]$, из уравнения (2.23) получаем расчетную формулу

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.24)$$

Определив из этой формулы требуемую площадь поперечного сечения, в зависимости от формы (круг, квадрат и др.) находим его размеры.

Определение допускаемой нагрузки. В этом случае известны размеры бруса и его материал, а требуется определить максимально допустимую нагрузку. Для этого, приняв $\sigma = [\sigma]$, из условия (2.23) находим

$$[N] \leq A [\sigma]. \quad (2.25)$$

Затем с помощью метода сечения по найденному допускаемому значению продольной силы $[N]$ определяем допускаемое значение нагрузки.

Проверочный расчет. При этом расчете нагрузка бруса, его материал и размеры известны и требуется проверить, выполняется ли условие (2.23). Для этого определяем наибольшее расчетное напряжение $\sigma = N/A$ в поперечном сечении бруса и сравниваем с допускаемым. Наибольшее расчетное напряжение не должно быть больше допускаемого, расчетное напряжение считают неопасным, если оно превышает допускаемое, но не более чем на 5%. Поперечное сечение бруса, в котором возникает наибольшее

расчетное напряжение при растяжении (сжатии), называется *опасным*.

Пример 2.4. Проверить прочность бруса, рассмотренного в примере 2.2, если материал бруса — сталь Ст3 ($\sigma_T = 240 \text{ Н/мм}^2$), а допускаемый коэффициент запаса прочности $[s] = 1,5$.

Решение 1. 1. Зная, что в данном случае предельное напряжение $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T = 240 \text{ Н/мм}^2$, а наибольшее расчетное напряжение $\sigma = 80 \text{ Н/мм}^2$, находим действительный коэффициент запаса прочности:

$$s = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma} = \frac{240}{80} = 3.$$

2. Допускаемый коэффициент запаса $[s] = 1,5$, значит

$$s = 3 > [s] = 1,5.$$

Условие прочности выполняется.

Решение 2. 1. Из решения примера 2.2 известно, что наибольшее расчетное напряжение $\sigma = 80 \text{ Н/мм}^2$ возникает в поперечных сечениях средней ступени.

2. Находим допускаемое напряжение для бруса по формуле (2.21):

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[s]} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ Н/мм}^2.$$

3. $\sigma = 80 \text{ Н/мм}^2 < [\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2$.

Условие прочности выполняется, но брус нагружен лишь на 50%.

Пример 2.5. Однородная жесткая плита AB силой тяжести $G = 1,2 \text{ кН}$ нагружена силой $F = 8 \text{ кН}$ (рис. 2.26, а). Определить из условия прочности диаметр стержня CD , удерживающего плиту в горизонтальном положении; $\alpha = 45^\circ$, $[\sigma] = 150 \text{ Н/мм}^2$.

Решение 1. Применяя метод сечений, рассечем стержень CD . Отбросив верхнюю его часть вместе с шарниром D , заменим их действие на оставшуюся часть нормальной силой N (рис. 2.26, б). Сила тяжести плиты приложена посередине ее длины.

2. Для определения силы N составим уравнение моментов относительно точки A всех сил, действующих на плиту:

$$-G \frac{AB}{2} + N \cdot AC \sin \alpha - F \cdot AB = 0.$$

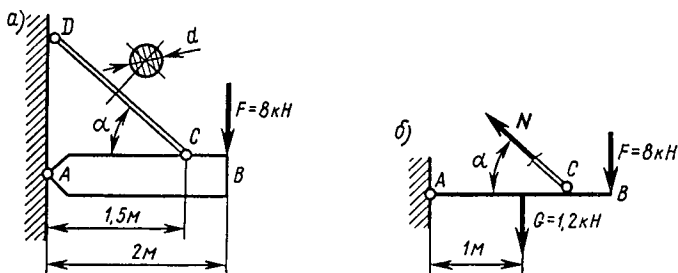


Рис. 2.26

Отсюда

$$N = \frac{G \frac{AB}{2} + F \cdot AB}{AC \sin \alpha} = \frac{1,2 \cdot 1 + 8 \cdot 2}{1,5 \sin 45^\circ} = 16,2 \text{ кН}.$$

3. Площадь поперечного сечения стержня, обеспечивающую его прочность, находим по расчетной формуле (2.24), имея в виду, что $N = 16,2 \text{ кН} = 16,2 \cdot 10^3 \text{ Н}$ и $[\sigma] = 150 \text{ Н/мм}^2$:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{16,2 \cdot 10^3}{150} = 108 \text{ мм}^2.$$

4. Из формулы площади круга находим диаметр стержня:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 108}{\pi}} = 11,8 \text{ мм}.$$

Округляя до четного числа, принимаем значение диаметра $d = 12 \text{ мм}$.

Пример 2.6. Из условия прочности стержней 1 и 2 рычажного механизма (рис. 2.27, а) определить допускаемую нагрузку F , если диаметры стальных стержней $d = 4 \text{ мм}$ и $[\sigma] = 140 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. По расчетной формуле (2.25) находим максимально допустимое значение продольной силы:

$$[N] = A [\sigma] = \frac{\pi d^2}{4} [\sigma] = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} 140 = 1760 \text{ Н}.$$

2. Нормальные силы в поперечных сечениях, возникающие при эксплуатации механизма, выразим через нагрузку F . Для этого рассечем оба стержня и изобразим (рис. 2.27, б, в) рычаги DEC и AB отдельно друг от друга. Нормальные силы N_1 и N_2 в стержнях рассматриваем как реакции связей, приложенные к рычагам.

3. Из условия равновесия рычага AB (рис. 2.27, в), т. е. из уравнения моментов сил относительно точки B

$$N_1 3a - Fa = 0,$$

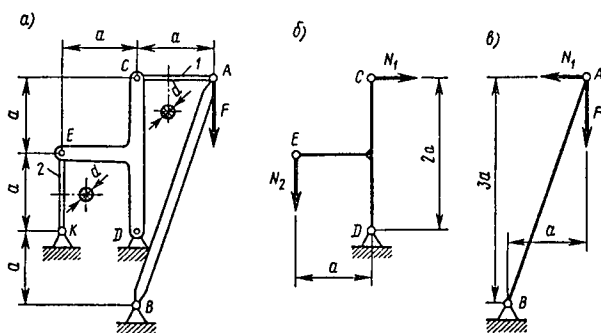


Рис. 2.27

имеем

$$N_1 = \frac{F}{3}.$$

Из условия равновесия рычага (из уравнения моментов сил относительно точки D) (рис. 2.27, б)

$$N_2 a - N_1 2a = 0$$

получим

$$N_2 = 2N_1 = \frac{2F}{3}.$$

4. Значение допускаемой нагрузки определяем исходя из условия прочности более нагруженного стержня 2:

$$[N_2] = 2F/3 = 1760 \text{ Н},$$

откуда

$$[F] = \frac{3 \cdot 1760}{2} = 2640 \text{ Н}.$$

При этой нагрузке механизма стержень 1 недогружен. В его поперечном сечении нормальное напряжение

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{F}{3} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{2640 \cdot 4}{3\pi \cdot 4^2} = 70 \text{ Н/мм}^2.$$

§ 2.11. Статически неопределимые системы

Механическая система, для которой реакции связей и внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью уравнений равновесия и метода сечений, называется *статически неопределимой*. Статически неопределимые системы отличаются от статически определимых большим числом наложенных связей.

На рис. 2.28 показаны статически определимые системы, нормальные силы N в которых определяются с помощью одного уравнения проекций на ось

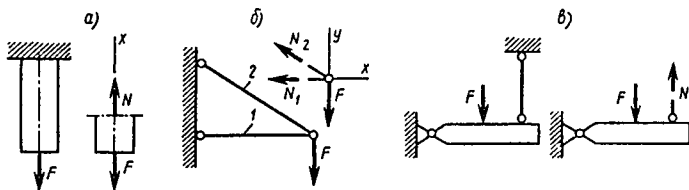


Рис. 2.28

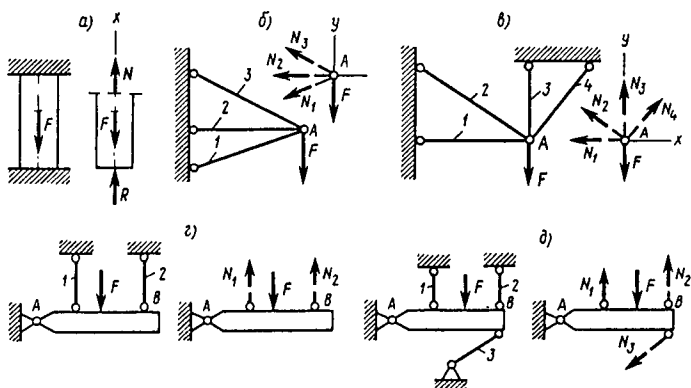


Рис. 2.29

x (а), двух уравнений проекций на оси x и y (б), одного уравнения моментов относительно неподвижного шарнира (в). На рис. 2.29 показаны статически неопределимые системы. Нормальная сила N в поперечном сечении бруса, жестко заделанного с обоих концов (рис. 2.29, а), не может быть определена из уравнения проекций на ось x , так как в него входят две неизвестные величины — нормальная сила N и реакция R . Системы с числом неизвестных сил, на единицу превышающих число уравнений статики, которые можно составить для этой системы, называются один раз статически неопределимыми. Чтобы решить задачу, необходимо составить дополнительное уравнение перемещений из условия, что общая длина бруса остается неизменной.

Система на рис. 2.29, б также один раз статически неопределима, так как в два уравнения проекций сил, которые можно составить в данном случае, входят три неизвестные величины: N_1 , N_2 и N_3 . Система на рис. 2.29, в два раза статически неопределима — в те же два уравнения статики входят четыре неизвестные. Для решения этих задач в первом случае нужно составить одно дополнительное уравнение перемещений, а во втором — два, исходя из условия, что при изменении длины стержней узел A остается для них общим.

Система на рис. 2.29, г один раз статически неопределима и к уравнению моментов сил относительно точки A , содержащему две неизвестные силы (N_1 и

N_2), нужно дополнительно составить одно уравнение перемещений. На рис. 2.29, δ изображена два раза статически неопределимая система и дополнительных уравнений перемещений необходимо составить два. В подобных случаях уравнения перемещений составляют из условия, что места закрепления стержней на жесткой балке AB остаются на одной прямой.

Вообще говоря, если число неизвестных сил системы на n превышает число уравнений статики, которые можно составить для нее, то система называется n раз статически неопределимой и для решения задачи необходимо составить n уравнений перемещений.

В статически неопределимых системах иногда необходимо считаться с напряжениями, возникающими при изменении температуры системы в целом или отдельных ее элементов. Так, например, в стержне, жестко заделанном с обоих концов в неподатливых стенках (рис. 2.30, a), при нагревании возникают напряжения сжатия (рис. 2.30, b), а при охлаждении — напряжения растяжения (рис. 2.30, $в$).

Пример 2.7. Брус постоянного поперечного сечения площадью A жестко закреплен с обоих концов и нагружен силой F , как показано на рис. 2.31, a . Определить напряжения, возникшие в поперечных сечениях верхней и нижней частей бруса.

Решение. 1. Действие связей на брус изобразим реакциями R_1 и R_2 (рис. 2.31, $б$). Для образовавшейся системы сил составим уравнение статики

$$R_1 + R_2 = F,$$

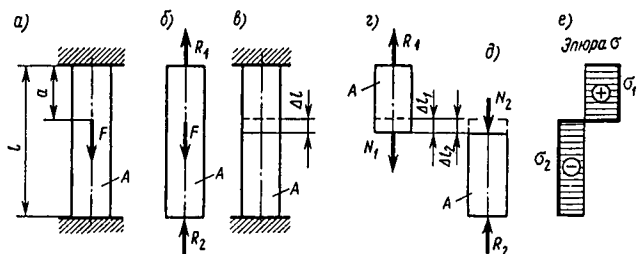


Рис. 2.31



Рис. 2.30

в которое входят две неизвестные силы. Система один раз статически неопределима.

2. Под действием силы F верхняя часть бруса растянулась на Δl_1 , нижняя часть укоротилась на Δl_2 (рис. 2.31, в, з, д). Так как общая длина бруса осталась неизменной, то

$$|\Delta l_1| = |\Delta l_2|.$$

Это и есть уравнение перемещений.

3. Из рис. 2.31, з, д следует, что

$$|\Delta l_1| = \left| \frac{N_1 a}{AE} \right| = \left| \frac{R_1 a}{AE} \right| \text{ и } |\Delta l_2| = \left| \frac{N_2 (l-a)}{AE} \right| = \left| \frac{R_2 (l-a)}{AE} \right|.$$

Левые части этих равенств равны между собой, значит равны и правые части, т. е.

$$R_1 a = R_2 (l-a).$$

4. Решая это уравнение совместно с уравнением статики, находим

$$R_1 = \frac{F(l-a)}{l} \text{ и } R_2 = \frac{Fa}{l}.$$

5. Напряжения в поперечных сечениях верхней растянутой части бруса

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{R_1}{A} = \frac{F(l-a)}{Al}.$$

6. Напряжения в поперечных сечениях нижней сжатой части бруса

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = -\frac{R_2}{A} = -\frac{Fa}{Al}.$$

7. Сопоставляя полученные значения напряжений в частях бруса, легко заметить, что

$$\frac{|\sigma_1|}{|\sigma_2|} = \frac{l-a}{a}.$$

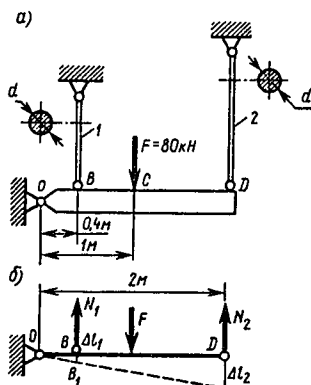


Рис. 2.32

8. Эпюра напряжений по длине бруса показана на рис. 2.31, е.

Пример 2.8. Жесткий брус удерживается в равновесии двумя стальными стержнями круглого поперечного сечения одного и того же диаметра (рис. 2.32, а). Определить необходимые диаметры этих стержней, если $[\sigma] = 150 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. Рассекая стержень и заменяя действие их отброшенных частей на жесткий брус нормальными силами N_1 и N_2 , получаем расчетную схему (рис. 2.32, б), для которой запишем уравнение статики (уравнение моментов сил относительно точки А):

$$N_1 \cdot OB - F \cdot OC + N_2 \cdot OD = 0.$$

После подстановки числовых значений величин ($F=80$ кН, $OB=0,4$ м, $OC=1$ м и $OD=2$ м) уравнение статики примет вид

$$N_1 + 5N_2 = 200.$$

2. Под действием силы F стержни 1 и 2 удлиняются соответственно на $\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{AE}$ и $\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{AE}$ (рис. 2.32, б).

Из подобия треугольников OBB_1 и ODD_1 получим уравнение перемещений

$$\Delta l_1 / \Delta l_2 = OB / OD.$$

Подставив сюда выражения Δl_1 , Δl_2 из п. 2, а также числовые значения $l_1=1$ м, $l_2=1,5$ м, $AB=0,4$ м и $AD=2$ м, получим

$$\frac{N_1 \cdot 1}{N_2 \cdot 1,5} = \frac{0,4}{2}, \text{ откуда } N_1 = 0,3N_2.$$

3. Решив совместно уравнения статики и перемещений, найдем

$$N_2 = 37,7 \text{ кН и } N_1 = 11 \text{ кН}.$$

4. Из условия прочности более нагруженного стержня 2 по расчетной формуле (2.24) находим требуемую площадь поперечного сечения

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{37,7 \cdot 10^3}{150} = 251 \text{ мм}^2.$$

5. Диаметр стержня

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 251}{\pi}} = 17,9 \text{ мм}.$$

6. Округляя до четного числа, принимаем $d_1 = d_2 = d = 18$ мм.

Пример 2.9. Определить, какие внутренние силы возникнут в стержневой системе (рис. 2.33, а), если стержень 2 нагреть на t° . Все стержни изготовлены из одного материала и имеют одинаковые площади поперечных сечений.

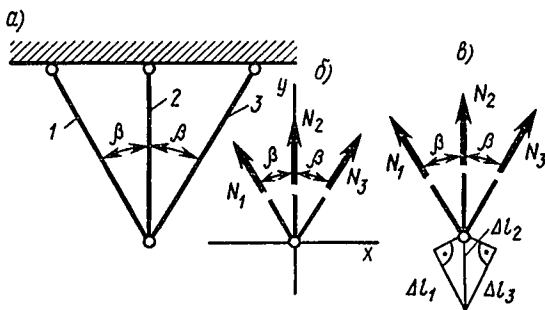


Рис. 2.33

Решение. 1. При деформировании системы в стержнях возникают нормальные силы N_1 , N_2 и N_3 . Выбрав оси x и y , как показано на рис. 2.33, б, составим два уравнения статики:

$$\begin{aligned} -N_1 \cos \beta + N_2 \cos \beta &= 0; \\ N_1 \cos \beta + N_2 + N_3 \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения ясно, что $N_1 = N_3$. Поэтому второе уравнение статики примет вид

$$N_2 = -2N_1 \cos \beta.$$

2. При нагревании стержень 2 удлиняется на Δl_2 и вытягивает стержни 1 и 3 соответственно на Δl_1 и Δl_3 (рис. 2.33, в).

Так как стержни изготовлены из одного материала, имеют одинаковые площади поперечных сечений и длины, то при $N_1 = N_3$ удлинения стержней 1 и 3 также равны между собой, т. е. $\Delta l_1 = \Delta l_3$. Из рис. 2.33, в получаем уравнение перемещений

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \beta.$$

3. Удлинение первого и третьего стержней происходит под действием силы со стороны стержня 2. Поэтому

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{AE} = \frac{N_1 l_2}{AE \cos \beta}.$$

Удлинение второго стержня происходит под влиянием температуры и действия на него стержней 1 и 3. Поэтому по формуле (2.13) находим

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{AE} + \alpha l_2 t^\circ.$$

4. Подставляя значения Δl_1 и Δl_2 в уравнения перемещений из п. 2, получаем

$$\frac{N_1}{AE \cos \beta} = \frac{N_2 \cos \beta}{AE} + \alpha t^\circ \cos \beta.$$

5. Решая уравнение перемещений совместно с уравнением статики, из п. 1 находим

$$N_1 = N_3 = \frac{AE \alpha t \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad \text{и} \quad N_2 = -\frac{2AE \alpha t \cos^3 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta}.$$

Таким образом, стержень 2 сжат, а стержни 1 и 3 растянуты.

Вопросы для самопроверки

1. Как нужно нагрузить прямой брус, чтобы он работал только на растяжение (сжатие)?

2. Сформулируйте закон Гука. Каков физический смысл модуля продольной упругости E ?

3. Круглый брус диаметром d и длиной l , нагруженный продольной силой F , удлинился на Δl . Какое удлинение получит изготовленный из того же материала и нагруженный силой F брус:

а) длиной $l_1 = 2l$ и диаметром $d_2 = d/2$; б) длиной $l_2 = 2l$ и диаметром $d_2 = 2d$?

4. Что такое «предельное напряжение» и что такое «расчетное напряжение»?

5. Что такое допускаемое напряжение и как оно выбирается в зависимости от свойств материалов?

6. На каком-либо примере объясните, как можно данную статически определимую систему превратить в статически неопределимую?

7. Почему при нагревании одного из стержней кронштейна (см. рис. 2.28, б) в обоих стержнях не возникнет дополнительное (температурное) напряжение, а при нагревании, например, стержня 2 (см. рис. 2.29, б) во всех стержнях возникают эти напряжения?

ГЛАВА 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА СРЕЗ И СМЯТИЕ

§ 2.12. Основные расчетные предпосылки и формулы

Если два бруса соединить между собой штифтом, а затем нагрузить направленными в противоположные стороны силами F (рис. 2.34, а), то при значительных силах или небольшом диаметре штифта он может быть разрушен по сечению, расположенному в плоскости соприкосновения поверхностей соединяемых брусьев (рис. 2.34, б). Такое разрушение соединительных деталей (штифта, болта, шпильки, заклепки, шпонки), происходящее под действием нагрузок, перпендикулярных их собственным осям (поперечные нагрузки), называется *срезом*.

Практические расчеты соединительных деталей на срез носят условный характер и основываются на трех допущениях: в поперечном сечении возможного среза детали возникает только один внутренний силовой фактор — поперечная сила Q ; касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, распределены по сечению равномерно; если соединение осуществлено несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и др.), то считается, что все

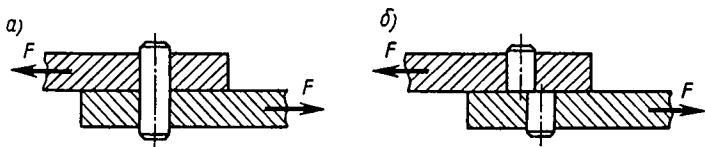


Рис. 2.34

они нагружены одинаково. Исходя из этих допущений условие прочности при расчете на срез запишется в таком виде:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{iA_{\text{ср}}} \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (2.26)$$

где $\tau_{\text{ср}}$ — расчетное напряжение среза в поперечном сечении детали; Q — поперечная сила, возникающая в этом сечении; $A_{\text{ср}}$ — площадь поперечного сечения срезаемой детали (площадь среза); i — число соединительных деталей; $[\tau_{\text{ср}}]$ — допускаемое напряжение при расчетах на срез, зависящее от материала соединительной детали и условий работы конструкции.

При расчете болтов, штифтов, шпонок и прочего принимают $[\tau_{\text{ср}}] = (0,25 \dots 0,35) \sigma_{\text{т}}$ или $[\tau_{\text{ср}}] = (0,55 \dots 0,60) [\sigma]$.

Из условия прочности (2.26) можно производить три вида расчетов: а) проверочный; б) проектный (определение числа соединительных деталей при заданных размерах либо определение размеров детали при заданном их числе); в) определение допускаемой нагрузки.

При небольшой толщине соединяемых брусьев (листов) и значительной нагрузке между поверхностью соединительной детали и стенками отверстия возникает большое взаимное давление, в результате которого стенка отверстия может обмяться, форма отверстия изменится и соединение разрушится.

Давление, возникшее между поверхностями соединительной детали и отверстия, называется *напряжением смятия* $\sigma_{\text{см}}$.

Расчеты на смятие, так же как и расчеты на срез, носят условный характер. Считают, что силы давления распределены по поверхности смятия равномерно и перпендикулярны ей. Отсюда условие прочности на смятие имеет такой вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{iA_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (2.27)$$

где F/i — нагрузка на один соединительный элемент (i — число элементов); $A_{\text{см}}$ — площадь смятия; $[\sigma_{\text{см}}]$ — допускаемое напряжение смятия. Для низкоуглеродистой стали $[\sigma_{\text{см}}] = 60 \dots 120 \text{ Н/мм}^2$.

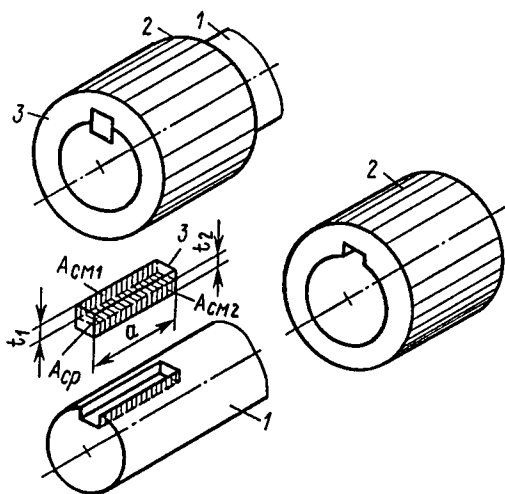


Рис. 2.35

Если поверхность смятия плоская, как, например, при соединении вала 1 и втулки 2 призматической шпонкой 3 (рис. 2.35), то площадь смятия определяется непосредственно как произведение длины на ширину:

$$A_{см1} = t_1 a \text{ и } A_{см2} = t_2 a.$$

Если поверхность смятия цилиндрическая, то в расчетную формулу (2.27) подставляется условная площадь смятия, равная площади проекции поверхности на диаметральную плоскость. На рис. 2.36 условная площадь смятия $A_{см} = dh$.

Кроме проверки деталей на смятие при относительно небольшой ширине соединяемых листов или пластин их проверяют на разрыв по поперечному сечению, ослабленному отверстиями. На рис. 2.36 площадь ослабленного поперечного сечения (площадь «нетто») $A_{нт} = (a - d) h$.

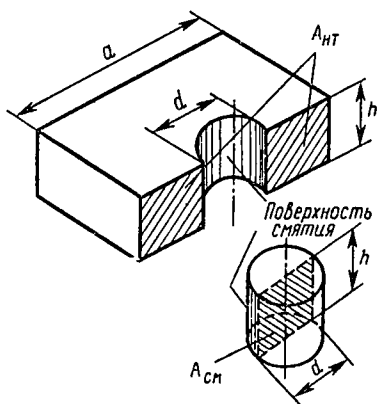


Рис. 2.36

§ 2.13. Примеры расчета

Пример 2.10. Проверить прочность стержня на растяжение, его головки на срез и опорной поверхности под головкой на смятие (рис. 2.37, а), если $[\sigma_p] = 110 \text{ Н/мм}^2$, $[\tau_{cp}] = 60 \text{ Н/мм}^2$ и $[\sigma_{cm}] = 120 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. Диаметр стержня $d = 5 \text{ мм}$, следовательно, площадь поперечного сечения стержня

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 5^2}{4} = 19,6 \text{ мм}^2,$$

а нормальная сила в этом сечении $N = F = 2 \text{ кН} = 2000 \text{ Н}$.

По формуле (2.23) рабочее напряжение в поперечном сечении

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{2000}{19,6} = 102 \text{ Н/мм}^2 < [\sigma_p].$$

2. Головка стержня может быть срезана по цилиндрической поверхности диаметром $d = 5 \text{ мм}$ и высотой $h = 2 \text{ мм}$ (рис. 2.37, б), т. е. $A_{cp} = \pi dh = \pi 5 \cdot 2 = 31,4 \text{ мм}^2$. Следовательно, по формуле (2.26) при $Q = F$ рабочее напряжение среза

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} = \frac{2000}{31,4} = 63,7 \text{ Н/мм}^2 > [\tau_{cp}].$$

Перегрузка составляет $\frac{63,7 - 60}{60} 100\% = 6,33\%$, что недопустимо. Необходимо либо снизить нагрузку, либо взять стержень с более высокой головкой.

3. Поверхность контакта между головкой стержня и опорой имеет форму плоского кольца (рис. 2.37, в), т. е. $A_{cm} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$.

Рабочее напряжение смятия определяем по формуле (2.27):

$$\sigma_{cm} = \frac{F \cdot 4}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{2000 \cdot 4}{\pi(8^2 - 5^2)} = 65 \text{ Н/мм}^2 < [\sigma_{cm}].$$

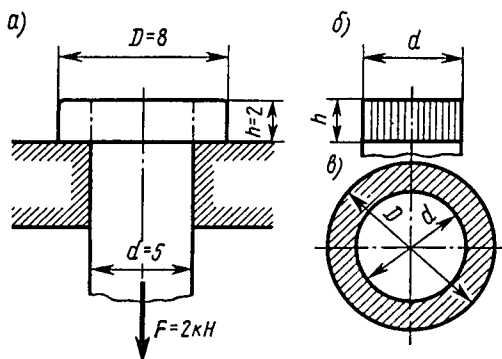


Рис. 2.37

Пример 2.11. Дюралюминиевая пластина 1 толщиной $t_1 = 1$ мм склеена карбинольным клеем со стеклопластиковой пластиной 2 (рис. 2.38). Определить толщину t_2 пластины 2, ширину b обеих пластин и длину клеевого шва, если $F = 500$ Н, допускаемое напряжение: для дюралюминия $[\sigma_p]_д = 100$ Н/мм², для стеклопластика $[\sigma_p]_с = 75$ Н/мм², для клеевого шва $[\tau_{ср}]_{кл} = 5$ Н/мм²

Решение. 1. Ширину листов b находим из условия прочности дюралюминиевого листа. Поперечное сечение листа 1 — прямоугольник площадью $A_1 = t_1 b$, нормальная сила в этом сечении $N_1 = F$. По расчетной формуле (2.24)

$$t_1 b \geq \frac{N_1}{[\sigma_p]_д},$$

откуда

$$b \geq \frac{N_1}{[\sigma_p]_д t_1} = \frac{500}{100 \cdot 1} = 5 \text{ мм}.$$

2. Толщину листа 2 находим из условия его прочности. Площадь поперечного сечения $A_2 = t_2 b$; продольная сила $N_2 = F$. По формуле (2.24)

$$t_2 b \geq \frac{N_2}{[\sigma_p]_с},$$

откуда

$$t_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma_p]_с b} = \frac{500}{75 \cdot 5} = 1,33 \text{ мм}$$

3. Длину клеевого шва определяем из условия прочности соединения на срез. Площадь клеевого шва $A_{кл} = bl$. Сдвигающая сила $Q = F$. Из условия прочности (2.26), полагая $\tau_{ср} = [\tau_{ср}]$ и $A_{ср} = A_{кл}$, имеем

$$bl \geq \frac{Q}{[\tau_{ср}]_{кл}},$$

откуда

$$l \geq \frac{Q}{b [\tau_{ср}]_{кл}} = \frac{500}{5 \cdot 5} = 20 \text{ мм}.$$

Пример 2.12. Определить силу F , действующую на пуансон

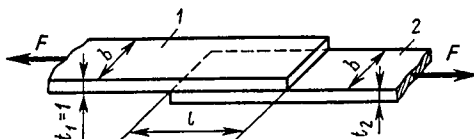


Рис. 2.38

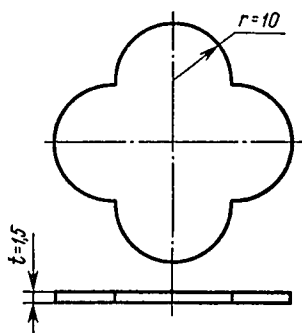


Рис. 2.39

штампа при штамповке пластинок заданной формы (рис. 2.39) из латунной ленты ($\tau_s = 240 \text{ Н/мм}^2$).

Решение. На пуансон штампа должна действовать сила $F = \tau_s A_{\text{ср}}$, где τ_s — предел прочности на срез латунной ленты; $A_{\text{ср}}$ — площадь среза, равная произведению длины контура пластинки на толщину листа. Длина контура пластинки складывается из длин четырех полуокружностей радиуса r . Значит, площадь среза $A_{\text{ср}} = 4\pi r t$.

Следовательно,

$$F = \tau_s \cdot 4\pi r t = 240 \cdot 4\pi \cdot 10 \cdot 1,5 \approx 45\,300 \text{ Н} = 45,3 \text{ кН}.$$

Вопросы для самопроверки

1. На каких допущениях основаны расчеты на срез и смятие?
2. Как определяется площадь смятия, если поверхность смятия: а) плоская; б) цилиндрическая?

ГЛАВА 4. КРУЧЕНИЕ

§ 2.14. Чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге

В качестве примера напряженного состояния в точке бруса рассматривалось (см. § 2.8) одноосное напряженное состояние и в связи с этим был установлен закон парности касательных напряжений. Рассмотрим еще одно напряженное состояние, носящее название *чистый сдвиг* (рис. 2.40, а). При чистом сдвиге на четырех гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения, а две

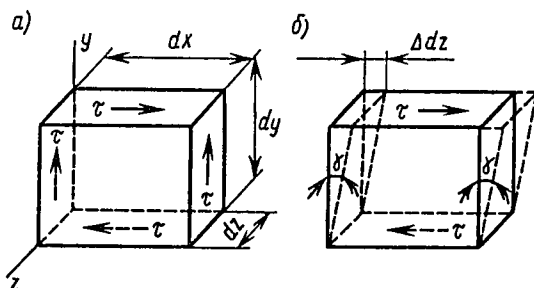


Рис. 2.40

границы свободны от напряжений. Согласно закону парности, касательные напряжения τ на всех четырех площадках равны по абсолютной величине, но направлены по смежным граням либо от ребра, либо к ребру. Легко доказать, что выделенный элемент при сдвиге находится в равновесии (рис. 2.40, а).

На вертикальных площадках $dA_v = dz \cdot dy$ действуют силы $\tau(dz \cdot dy)$, образующие пару с моментом относительно оси z :

$$\tau(dz \cdot dy) dx;$$

на горизонтальных площадках $dA_r = dx \cdot dz$ действуют силы $\tau(dx \cdot dz)$, образующие пару с моментом относительно оси z :

$$-\tau(dx \cdot dz) dy,$$

а алгебраическая сумма моментов пар относительно оси z

$$\tau dz \cdot dy \cdot dx - \tau dx \cdot dz \cdot dy = 0.$$

Явление сдвига состоит в том, что под действием внешних сил первоначальная форма выделенного элемента искажается (рис. 2.40, б), т. е., например, горизонтальные площадки сдвигаются относительно друг друга на расстояние Δdz , называемое абсолютным сдвигом, и угол $\pi/2$ между смежными площадками изменяется на величину γ . Этот угол не зависит от размеров выделенного элемента, поэтому он является мерой деформации сдвига и называется *углом сдвига* или *угловой деформацией*. Установлено, что касательные напряжения и угол сдвига в пределах упругих деформаций связаны между собой прямой пропорциональной зависимостью

$$\tau = G\gamma, \quad (2.28)$$

которая называется *законом Гука при сдвиге*. Коэффициент пропорциональности G называется *модулем сдвига* и характеризует жесткость материала при сдвиге.

Для одного и того же материала между модулем упругости E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ существует следующая зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.29)$$

По этой формуле, зная E и μ , легко найти G . Например, для стали $\mu=0,25$ и $G_{\text{ст}}=0,4E_{\text{ст}}$. Обычно для стали принимают $G=0,8 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$.

§ 2.15. Крутящий момент. Построение эпюр

Кручением называется такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — крутящий момент. Чтобы получить такой вид нагружения в простейшем случае, брус необходимо нагрузить действующими в плоскостях, перпендикулярных его оси, и в противоположных направлениях двумя парами сил (рис. 2.41, а), моменты M_1 и M_2 которых называются внешними скручивающими моментами. Для упрощения дальнейшего изложения считаем, что алгебраическая сумма внешних моментов, приложенных к брусу, равна нулю, т. е. брус находится в равновесии (в состоянии покоя или равномерного вращения).

Разрежем брус по сечению A на части I и II (рис. 2.41, а) и, отбросив часть I , рассмотрим равновесие оставленной части II . Из рис. 2.41, б видим, что равновесие обеспечивается возникновением только крутящего момента M_x ; алгебраические суммы проекций внешних сил, образующих пару, на каждую из осей равны нулю, равны нулю и моменты пары сил относительно осей y и z . Следовательно, из равенства (2.1) получим

$$N=0; \quad Q_y=0; \quad Q_z=0; \quad M_z=0; \quad M_y=0$$

и лишь крутящий момент $M_x=M_2$.

Разрезав брус по сечению A и отбросив часть II (рис. 2.41, в), видим, что в сечении A_1 крутящий момент $M_x=M_1$ ни численно, ни по знаку не изменился, так как при равновесии бруса $M_1=M_2$.

В тех случаях, когда на брус действуют не два, а несколько скручивающих моментов, целесообразно при вычислении крутящих моментов принять такое **правило знаков**: при рассмотрении любой из оставленных частей бруса со стороны сечения внешние моменты, действующие по ходу часовой стрелки, считаем положительными, действующие против хода часовой стрелки — отрицательными.

Для получения наглядной картины изменения

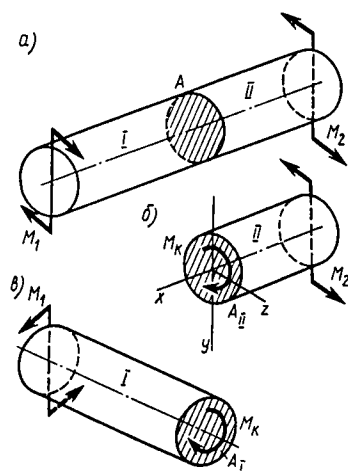


Рис. 2.41

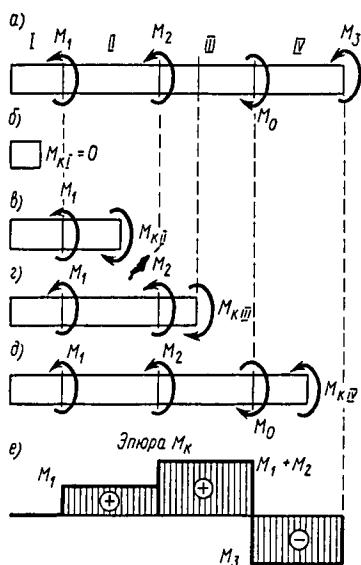


Рис. 2.42

крутящих моментов в различных сечениях строят их эпюру по всей длине бруса. Порядок построения эпюры крутящих моментов M_k рассмотрим на примере.

На рис. 2.42, а изображен брус, нагруженный четырьмя моментами. Из условия равновесия бруса следует, что $M_1 + M_2 + M_3 - M_0 = 0$. Сечениями, в которых приложены скручивающие моменты, брус разделен на четыре участка: I, II, III и IV. Рассечем брус на участке I, и отбросив часть бруса правее сечения, видим (рис. 2.42, б), что оставленная левая часть не нагружена. Значит, $M_{kI} = 0$. Рассечем брус на участке II, отбросим правую часть бруса и рассмотрим левую часть со стороны сечения. Из рис. 2.42, в увидим, что $M_{kII} = M_1$ (если смотреть со стороны сечения, то момент M_1 действует по ходу часовой стрелки). Рассматривая далее левую часть бруса со стороны сечения на участке III (рис. 2.42, г), видим, что $M_{kIII} = M_1 + M_2$. Из рассмотрения левой части бруса со стороны сечения на участке IV (рис. 2.42, д) следует $M_{kIV} = M_1 + M_2 - M_0$. Из условия равновесия всех четырех скручивающих моментов ($M_0 = M_1 + M_2 + M_3$) ясно, что $-M_0 + M_1 + M_2 < 0$. Поэтому $M_{kIV} < 0$.

На рис. 2.42, *е* результаты вычислений изображены в виде эпюры. На любом участке между сечениями бруса, нагруженными скручивающими моментами, крутящие моменты остаются постоянными. При переходе от одного участка к другому на эпюре возникают скачки, численно равные моментам внешних скручивающих пар.

Эпюру M_x можно было бы строить и справа налево. Тогда, отбрасывая каждый раз левую часть бруса, мы получили бы для участка *IV* $M_{xIV} = -M_3$ (из условия равновесия внешних моментов следует, что $M_3 = -M_0 + M_1 + M_2$), для участка *III* $M_{xIII} = -M_3 + M_0$ (легко видеть, что $-M_3 + M_0 = M_1 + M_2$) и т. д.

§ 2.16. Кручение круглого прямого бруса. Основные предпосылки и формулы

Зависимости между величинами, характеризующими кручение бруса, представляются в наиболее простом виде при круглом поперечном сечении бруса. Рассматривая кручение круглого прямого бруса, исходим из трех допущений: выбранное в брусе до нагружения поперечное сечение остается плоским и перпендикулярным оси и после нагружения (гипотеза Я. Бернулли, см. гл. 2); расстояния между поперечными сечениями при нагружении бруса не изменяются; радиусы поперечных сечений бруса не искривляются.

Представим себе заделанный одним концом в неподатливой стенке брус круглого поперечного сечения радиуса r , на цилиндрической поверхности которого вдоль образующих нанесены прямые линии (рис. 2.43, *а*). Если свободный конец бруса нагрузить моментом M_0 , то брус деформируется (скручивается) и линии на цилиндрической поверхности принимают вид винтовых линий (рис. 2.43, *б*). Для того чтобы исследовать деформированное состояние бруса, выделим из него на расстоянии x от заделки элемент длиной dx и изобразим этот элемент отдельно в увеличенном виде (рис. 2.44).

Предположим, что левое сечение выделенного элемента повернулось на некоторый угол φ , тогда правое сечение, расположенное несколько дальше от неподвижного сечения бруса в заделке, повернулось на угол $\varphi + d\varphi$. Угол $d\varphi = B \hat{O}_1' B_1$ называется *углом*

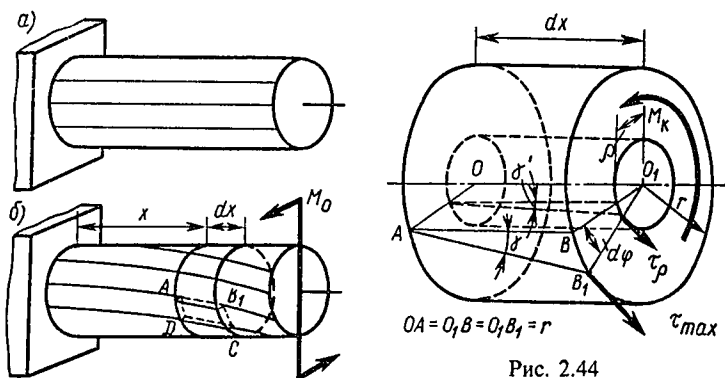


Рис. 2.44

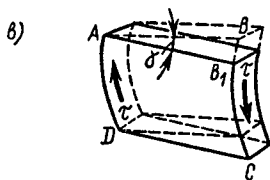


Рис. 2.43

закручивания выделенного элемента. Этот угол зависит от длины элемента dx и поэтому при одном и том же деформированном состоянии может быть различным.

Деформация бруса при кручении характеризуется величиной

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (2.30)$$

называемой *относительным углом закручивания*. Это угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними.

Если у поверхности выделенного элемента вырезать слой AB_1CD (см. рис. 2.43, б, в), который из-за малости размеров можно считать призмой, то этот призматический элемент находится в состоянии чистого сдвига, т. е. $\angle BAB_1$ на цилиндрической поверхности элемента (рис. 2.44) является углом сдвига γ . Приближенно можно считать $\sphericalangle BB_1 = d\varphi \cdot r = \gamma \cdot dx$, отсюда с учетом равенства (2.30)

$$\gamma = (d\varphi/dx)r = \varphi_0 r. \quad (2.31)$$

Чтобы выразить максимальные касательные напряжения τ_{\max} в крайних точках поперечного сечения бруса, найденное значение γ подставим в выражение (2.28):

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r. \quad (2.32)$$

Если мысленно вырезать призматический элемент на расстоянии ρ от оси бруса, то угол сдвига у этого элемента $\gamma' < \gamma$ (рис. 2.43) и тогда в любой точке поперечного сечения на расстоянии ρ от центра

$$\tau_{\rho} = G\varphi_0 \rho. \quad (2.33)$$

Равенство (2.33) выражает линейный закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению при кручении. Распределение касательных напряжений по сечению согласно этому закону показано на рис. 2.45, а. Максимальные касательные напряжения кручения τ_{\max} возникают у края сечения, а по мере приближения к центру убывают до нуля. Таким образом, в большей степени сопротивляются кручению те части бруса, которые расположены ближе к его поверхности. Поэтому для экономии материала брусья, работающие на кручение, иногда изготавливают пустотелыми. Поперечное сечение такого бруса для полого вала имеет форму плоского кругового кольца, распределение касательных напряжений в нем показано на рис. 2.45, б. Касательные напряжения вследствие закона парности возникают и в продольных сечениях бруса (рис. 2.46).

Зная закон распределения касательных напряжений по сечению, установим зависимость между возникшим в нем крутящим моментом M_k , относительным углом закручивания φ_0 и максимальными касательными напряжениями τ_{\max} .

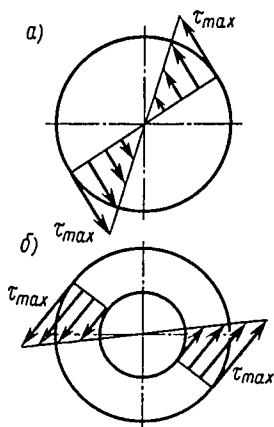


Рис. 2.45

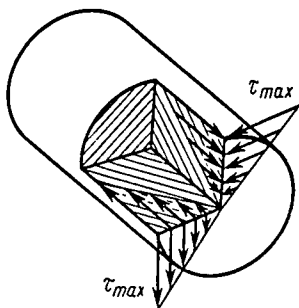


Рис. 2.46

Пусть в некотором сечении (рис. 2.47, а) возник крутящий момент M_k , который, как известно из предыдущего параграфа, можно определить через внешние моменты. На некотором расстоянии ρ от центра выберем в сечении бесконечно малую площадку dA и допустим, что напряжение по этой площадке τ_ρ . Тогда с учетом равенства (2.33) элементарный крутящий момент

$$dM_k = \tau_\rho dA \cdot \rho = G \varphi_0 \rho^2 dA.$$

Суммируя элементарные крутящие моменты dM_k по всей площади и учитывая, что G и φ_0 — величины постоянные, получаем

$$M_k = G \varphi_0 \int_A \rho^2 dA.$$

Обозначив J_p выражение $\int_A \rho^2 dA$, получим

$$M_k = G \varphi_0 J_p. \quad (2.34)$$

Величина

$$\int_A \rho^2 dA = J_p, \quad (2.35)$$

т. е. сумма произведений всех элементарных площадок поперечного сечения на квадраты их расстояний от центра, называется *полярным моментом инерции сечения*.

В уравнении (2.35) ρ выражается в м, см или мм, а dA — в м^2 , см^2 или мм^2 ; следовательно, полярный момент инерции выражается в м^4 , см^4 или мм^4 .

Из равенства (2.34) получаем выражение относи-

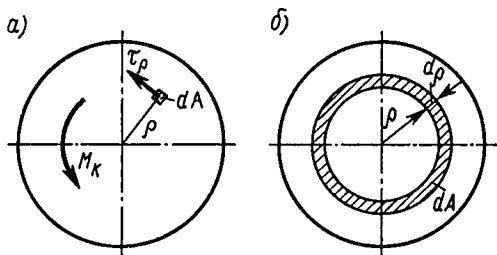


Рис. 2.47

тельного угла закручивания

$$\varphi_0 = \frac{M_x}{GJ_p}. \quad (2.36)$$

Полный угол закручивания бруса (значение углового перемещения при кручении)

$$\varphi = \frac{M_x l}{GJ_p}. \quad (2.37)$$

Легко видеть, что эта формула в принципе аналогична формуле (2.21) для удлинения Δl . Произведение GJ_p называется *жесткостью сечения бруса при кручении*.

В формуле (2.36) φ_0 выражается в рад/м или рад/мм, в формуле (2.37) φ выражается в рад.

Заменив в равенстве (2.34) произведение $G\varphi_0$ его выражением из формулы (2.32) ($G\varphi_0 = \tau_{\max}/r$), получим $M_x = \tau_{\max} J_p / r$. Откуда максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{M_x r}{J_p}. \quad (2.38)$$

Отношение полярного момента инерции круглого сечения к его радиусу называется *полярным моментом сопротивления* и обозначается W_p :

$$W_p = \frac{J_p}{r}. \quad (2.39)$$

где W_p выражается в м^3 , см^3 или мм^3 . Таким образом,

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}. \quad (2.40)$$

Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса равно частному от деления крутящего момента на полярный момент сопротивления.

При вычислении значений φ_0 , φ и τ_{\max} соответственно по формулам (2.36), (2.37) и (2.38) кроме крутящего момента M_x , модуля сдвига G , длины l нужно знать значение полярного момента инерции J_p или полярного момента сопротивления W_p , которые зависят от формы и размеров сечения.

Чтобы получить формулу полярного момента

инерции круга, выделим в его площади на расстоянии ρ от центра элемент dA в виде плоского кольца шириной $d\rho$ (рис. 2.47, б). Если пренебречь разницей между длинами внешнего и внутреннего контуров кольцевого элемента, то его площадь $dA = 2\pi\rho d\rho$. Подставляя значение dA в выражение (2.35) и принимая во внимание, что при интегрировании по всей площади ρ изменяется от 0 до $d/2$ (где d — диаметр круглого сечения), получаем

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{d/2}.$$

Отсюда

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.41)$$

Аналогично, для кольцевого сечения

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_0^4) = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4), \quad (2.42)$$

где d — наружный, а d_0 — внутренний диаметры кольца; $c = d_0/d$.

Подставляя в формулу (2.39) значения J_p из равенств (2.41) и (2.42) и имея в виду, что $r = d/2$, получаем полярные моменты сопротивления круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \quad (2.43)$$

и кольцевого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4). \quad (2.44)$$

§ 2.17. Расчеты на прочность и жесткость

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau_k]. \quad (2.45)$$

Предел текучести при кручении связан с пределом текучести при растяжении зависимостью $\tau_T \approx (0,55 \dots 0,60) \sigma_T$, для пластичных материалов принимают $[\tau_k] \approx (0,55 \dots 0,60) [\sigma_p]$.

По условию прочности при кручении (2.45) выполняют три вида расчетов.

Проектный расчет. Определив крутящий момент в сечении бруса и приняв $\tau_{\max} = [\tau_k]$, находим требуемое значение полярного момента сопротивления:

$$W_p = \frac{M_k}{\tau_k}. \quad (2.46)$$

Затем, исходя из формулы поперечного сечения (круг или кольцо), находим диаметр бруса из формулы (2.43) или (2.44). Полученное значение диаметра в миллиметрах следует округлить до ближайшего большего четного числа или числа, оканчивающегося на 5.

Расчет допускаемой нагрузки. Определив полярный момент сопротивления сечения бруса и приняв $\tau_{\max} = [\tau_k]$, находим допускаемое значение крутящего момента:

$$[M_k] = W_p [\tau_k]. \quad (2.47)$$

Затем, исходя из схемы нагружения, находим максимально допускаемую нагрузку.

Проверочный расчет. Определив максимальный крутящий момент в поперечном сечении бруса и полярный момент сопротивления сечения, находим $\tau_{\max} = M_k / W_p$ и сравниваем его с $[\tau_k]$.

Условие жесткости бруса при кручении состоит в том, чтобы относительный угол закручивания φ_0 не превосходил некоторого заданного допускаемого значения $[\varphi_0]$, т. е.

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\varphi_0]. \quad (2.48)$$

В Международной системе единиц (СИ) допускаемый угол закручивания $[\varphi_0]$ выражается в рад/м, но в практике часто допускаемый угол закручивания задается в град/м. Тогда это значение нужно перевести в единицы СИ, умножив на отношение $\pi/180^\circ$, т. е.

$$[\varphi_0] = \frac{\pi}{180^\circ} [\varphi^\circ]. \quad (2.49)$$

Применяемые в машиностроении значения допускаемых углов закручивания колеблются в довольно

широких пределах; чаще всего принимают
 $[\varphi_0] = (4,38 \dots 17,5) 10^{-3} \text{ рад/м} = (4,38 \dots 17,5) 10^{-6} \text{ рад/мм}$,
 или

$$[\varphi_0] = (0,25 \dots 1,0) \text{ град/м} = (0,25 \dots 1,0) 10^{-3} \text{ град/мм}.$$

По условию жесткости (2.48) выполняют тоже три вида расчетов: **проверочный** — непосредственно по расчетной формуле (2.48); **проектный** — по расчетной формуле

$$J_p = \frac{M_*}{G[\varphi_0]}. \quad (2.50)$$

Далее, в зависимости от формы сечения (круг или кольцо) по найденному значению J_p из формул (2.41) или (2.42) определяют диаметр d или диаметры d и d_0 .

Расчет допускаемой нагрузки выполняют по формуле

$$[M_*] = GJ_p [\varphi_0]. \quad (2.51)$$

Объектом расчетов на прочность или жесткость часто становится брус, который называется *валом*. На вал при передаче мощности всегда действуют по крайней мере два скручивающих момента (иногда три и больше). При расчете валов необходимо помнить известную из теоретической механики формулу (1.195), выражающую зависимость между вращающим (скручивающим) моментом $M_{вр}$, передаваемой мощностью P и угловой скоростью ω :

$$M_{вр} = \frac{P}{\omega}, \quad (2.52)$$

а также формулу, выражающую зависимость между угловой скоростью ω (рад/с) и частотой вращения n (об/мин):

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (2.53)$$

Пример 2.13. Определить диаметр вала для передачи мощности $P = 50 \text{ кВт}$ при частоте вращения $n = 300 \text{ об/мин}$, если $[\tau_*] = 30 \text{ Н/мм}^2$ и $[\varphi_0] = 0,3 \text{ град/м}$, $G = 0,8 \cdot 10^6 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. При передаче заданной мощности вал нагружен двумя скручивающими моментами, каждый из которых определяют по формуле (2.52). Так как $\omega = \frac{\pi n}{30}$ и $P = 50 \cdot 10^3 \text{ Вт}$, то

$$M_1 = M_2 = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 50 \cdot 10^3}{\pi \cdot 300} = 1590 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. В каком угодно сечении вала между приложенными к нему внешними моментами M_1 и M_2 (рис. 2.41) крутящий момент M_k равен любому из них, т. е.

$$M_k = M_1 = M_2 = 1590 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Определим диаметр d_n вала из условия прочности. Выразив крутящий момент M_k в Н·мм, по расчетной формуле (2.46) находим требуемый полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{M_k}{[\tau_k]} = \frac{1590 \cdot 10^3}{30} = 53 \cdot 10^3 \text{ мм}.$$

Из формулы (2.43) находим диаметр вала, удовлетворяющий условию прочности:

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 53 \cdot 10^3}{\pi}} = 10 \sqrt[3]{270} = 64,6 \text{ мм}.$$

Округляя до целого числа мм, принимаем $d_n = 65 \text{ мм}$.

4. Определяем диаметр $d_{\text{ж}}$ вала из условия жесткости. По формуле (2.49) находим допускаемый угол закручивания:

$$[\varphi_0] = \frac{\pi[\varphi_0']}{180} = \frac{\pi \cdot 0,3}{180} = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} = 5,23 \cdot 10^{-6} \text{ рад/мм}.$$

По расчетной формуле (2.50) находим требуемый полярный момент инерции сечения:

$$J_p = \frac{M_k}{G[\varphi_0]} = \frac{1590 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 5,23 \cdot 10^{-6}} = 380 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Из формулы (2.41) находим диаметр вала, удовлетворяющий условию жесткости:

$$d_{\text{ж}} = \sqrt[4]{\frac{32J_p}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 380 \cdot 10^4}{\pi}} = 10 \sqrt[4]{3860} = 79 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_{\text{ж}} = 80 \text{ мм}$.

5. Из двух найденных значений диаметра вала необходимо взять большее, так как оно удовлетворяет обоим условиям. Таким образом, конструктивный диаметр вала $d = 80 \text{ мм}$.

§ 2.18. Цилиндрические пружины растяжения и сжатия

Цилиндрические винтовые пружины относятся к упругим элементам, широко применяемым в машиностроении и приборостроении. Их используют в качестве амортизаторов или аккумуляторов механической энергии, в установках передачи сил давления и в механизмах возврата детали в исходное положение.

Здесь кратко рассмотрены некоторые расчетные формулы винтовых пружин растяжения (рис. 2.48, а)

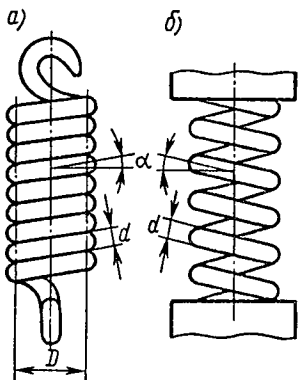


Рис. 2.48

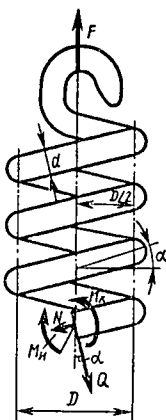


Рис. 2.49

и сжатия (рис. 2.48, б). Эти пружины можно рассматривать как пространственно изогнутые брусья. Они характеризуются следующими параметрами: диаметром проволоки d , из которой навита пружина, средним диаметром витка D , т. е. диаметром винтовой линии, образуемой осью проволоки, числом витков i и углом подъема витков α . Винтовые пружины растяжения навиваются без просветов между витками, пружины сжатия — с просветами.

Если рассечь один из витков растянутой пружины поперечным сечением (рис. 2.49) и отбросить нижнюю часть пружины, то увидим, что внешняя сила F уравнивается четырьмя внутренними силовыми факторами, нормальной $N = F \sin \alpha$, поперечной $Q = F \cos \alpha$ силами, изгибающим $M_{\text{н}} = (FD/2) \sin \alpha$ и крутящим $M_{\text{к}} = (FD/2) \cos \alpha$ моментами. На практике чаще всего используют пружины с небольшим углом подъема $\alpha \leq 10^\circ$. Для таких пружин нормальная сила и изгибающий момент не имеют существенного значения и расчет ведется только по касательным напряжениям, считая, что поперечная сила $Q = F$ и крутящий момент $M_{\text{к}} = FD/2$ (принимая, что при $\alpha \leq 10^\circ \cos \alpha \approx 1$).

Касательные напряжения, обусловленные поперечной силой Q , распределены по сечению равномерно, их эпюра изображена на рис. 2.50, а. Касательные напряжения, обусловленные крутящим моментом, достигают наибольшего значения у края сечения, их эпюра изображена на рис. 2.50, б. Из суммарной

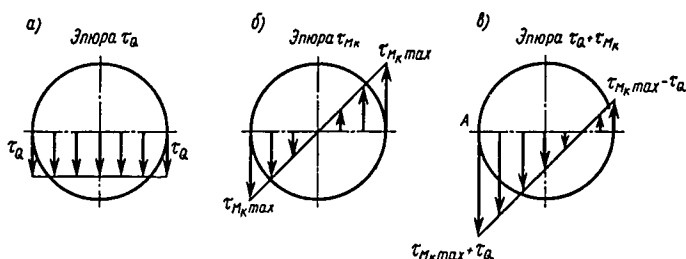


Рис. 2.50

эпюры касательных напряжений (рис. 2.50, в) видно, что максимальное напряжение возникает в точках сечения, расположенных ближе к оси пружины, т. е. на внутренней части контура сечения витка:

$$\tau_{\max} = \tau_{M_k \max} + \tau_Q = \frac{M_k}{W_p} + \frac{Q}{A}.$$

Имея в виду, что в данном случае $M_k = FD/2$, $W_p = \pi d^3/16$, $Q = F$ и $A = \pi d^2/4$, получим

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D} \right).$$

Отношение $D/d = c$ называется *индексом пружины*; введя эту величину в последнее равенство, получим

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{1}{2c} \right).$$

При обычных значениях индекса c в пределах 4...12 отношение $1/(2c) \leq 0,125$, поэтому вторым слагаемым в скобках можно пренебречь, т. е. учитывать лишь напряжения кручения и вести расчет по приближенной формуле

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8Fc}{\pi d^2}.$$

Кроме индекса c прочность пружины зависит от угла подъема ее витков. Желая учесть и это, в формулу вводят коэффициент

$$k = 1 + \frac{1,5}{c}, \quad (2.54)$$

и тогда условие прочности пружины можно записать так:

$$\tau_{\max} = \frac{k8Fc}{\pi d^2} \leq [\tau], \quad (2.55)$$

где допускаемое напряжение $[\tau] = 400 \dots 1000 \text{ Н/мм}^2$, так как для изготовления пружин применяют высококачественные углеродистые и легированные марки сталей.

Диаметр пружины d из условия прочности (2.55) выражается формулой

$$d = \sqrt{\frac{8kFc}{\pi[\tau]}} = 1,6 \sqrt{\frac{(c+1,5)F}{[\tau]}}. \quad (2.56)$$

Под действием нагрузки F пружина растяжения удлиняется, а пружина сжатия укорачивается. Удлинение или укорочение (осадка) пружины определяется по формуле, приводимой без вывода:

$$\lambda = \frac{8FD^3i}{Gd^4} = \frac{8Fc^3i}{Gd}, \quad (2.57)$$

где i — число витков пружины.

Пример 2.14. Размеры пружины конусной фрикционной муфты: $D = 75 \text{ мм}$, $d = 10 \text{ мм}$, $i = 4$. Проверить прочность пружины, если в рабочем состоянии она сжата на 30 мм ; $[\tau] = 450 \text{ Н/мм}^2$; $G = 0,8 \times 10^5 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. Находим индекс пружины: $c = D/d = 75/10 = 7,5$.

2. Из формулы (2.57), полагая $\lambda = 30 \text{ мм}$, находим силу, сжимающую пружину:

$$F = \frac{\lambda G d}{8 c^3 i} = \frac{30 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10}{8 \cdot 7,5^3 \cdot 4} = 1,78 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

3. По формуле (2.54) определяем значение коэффициента k :

$$k = 1 + \frac{1,5}{c} = 1 + \frac{1,5}{7,5} = 1,2.$$

4. По формуле (2.55) находим максимальное напряжение, возникающее в пружине:

$$\tau_{\max} = k \frac{8Fc}{\pi d^2} = \frac{1,2 \cdot 8 \cdot 1,78 \cdot 10^3 \cdot 7,5}{\pi \cdot 10^2} = 408 \text{ Н/мм}^2.$$

5. $\tau_{\max} = 408 \text{ Н/мм}^2 < [\tau] = 450 \text{ Н/мм}^2$, следовательно, пружина недогружена на

$$\frac{450 - 408}{450} 100\% \approx 9,3\%.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте закон Гука при сдвиге. Каков физический смысл модуля упругости сдвига G ?
2. Как нужно нагрузить брус, чтобы он работал только на кручение?
3. Брус нагружен системой трех пар в плоскостях поперечных сечений, причем действие двух из них уравнивается действием третьей. Как следует расположить вдоль бруса эти три пары, чтобы крутящий момент в любом сечении бруса был по абсолютному значению меньше наибольшего из трех приложенных?
4. От каких геометрических характеристик сечения зависит при кручении прочность бруса, а от какой — его жесткость? Почему прочность и жесткость при кручении зависят от этих характеристик, а не от площади поперечного сечения?
5. Два круглых бруса имеют равные площади поперечных сечений, но одно из этих сечений сплошной круг, а другое — круговое кольцо. Какой из брусев имеет: а) большую прочность; б) большую жесткость?
6. В одинаковой ли степени изменяется жесткость и прочность бруса круглого поперечного сечения при изменении его диаметра?
7. Можно ли по внешнему виду отличить винтовую пружину сжатия от винтовой пружины растяжения?

ГЛАВА 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 2.19. Моменты инерции сечений

С некоторыми геометрическими характеристиками сечений мы знакомы. Любое сечение бруса имеет определенную геометрическую форму и площадь. В формулы для определения координат центра тяжести сечения (см. § 1.22) входит алгебраическая сумма произведений элементарных площадей на координаты их центров тяжести; эта величина называется *статическим моментом сечения*. В интегральной форме статические моменты сечения S_x и S_y относительно осей x и y можно представить так:

$$S_x = \int_A y dA \quad \text{и} \quad S_y = \int_A x dA. \quad (2.58)$$

Из формул статики следует:

$$S_x = Ay_c \quad \text{и} \quad S_y = Ax_c, \quad (2.59)$$

где A — площадь сечения; x_c и y_c — координаты центра тяжести сечения. Легко заметить, что при $y_c = 0$, когда ось x проходит через центр тяжести сечения, $S_x = 0$: *статические моменты сечения относительно центральных осей равны нулю.*

В § 2.16 при исследовании зависимости между крутящим моментом и касательными напряжениями возникла еще одна геометрическая характеристика — полярный момент инерции сечения J_p . Появление этой величины обусловлено неравномерностью распределения касательных напряжений по сечению при кручении.

Познакомимся с новыми геометрическими характеристиками сечения — *осевыми и центробежными моментами инерции* относительно координатных осей (рис. 2.51).

Представим себе, что сечение разделено на множество элементарных площадок dA (на рис. 2.51 изображена одна из них), координаты которых x и y . Тогда интегралы

$$J_x = \int_A y^2 dA \quad \text{и} \quad J_y = \int_A x^2 dA \quad (2.60)$$

называются *моментами инерции сечения* относительно осей x или y , а интеграл

$$J_{xy} = \int_A xy dA \quad (2.61)$$

принято называть *центробежным моментом инерции* сечения относительно осей x и y .

Так же как и полярный момент инерции, осевые и центробежные моменты инерции выражаются в м^4 , см^4 и мм^4 .

Значение площадки dA положительно, поэтому независимо от знака координаты x или y *осевые моменты инерции всегда положительны*, а центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от расположения сечения относительно осей x или y .

Расстояние ρ между элементарной площадкой dA и началом координат связано с координатами площадки очевидной зависимостью (рис. 2.51)

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Умножив на dA обе части этого равенства, а

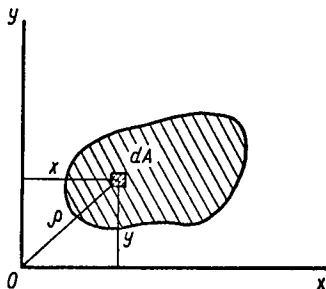


Рис. 2.51

затем проинтегрировав их по всей площади сечения:

$$\int_A \rho^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA,$$

получим важную зависимость между осевыми и полярными моментами инерции

$$J_p = J_x + J_y. \quad (2.62)$$

Сумма осевых моментов инерции сечения относительно взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей. Моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, называются центральными.

Между моментами инерции сечения относительно параллельных осей, из которых одна центральная, существует важная зависимость, используемая далее в расчетах. Расположим сечение в осях координат $x_1 O y_1$, а затем через центр тяжести C сечения проведем оси $Cx \parallel O x_1$ и $Cy \parallel O y_1$ (рис. 2.52). Координаты элементарной площадки dA сечения в осях $x_1 O y_1$ связаны с координатами в центральных осях равенствами

$$y_1 = y + a \text{ и } x_1 = x + e,$$

где a и e — расстояния между осями.

Возведем обе части первого равенства во вторую степень:

$$y_1^2 = y^2 + a^2 + 2ay.$$

Умножим обе части этого равенства на dA и проинтегрируем по всей площади сечения:

$$\int_A y_1^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA.$$

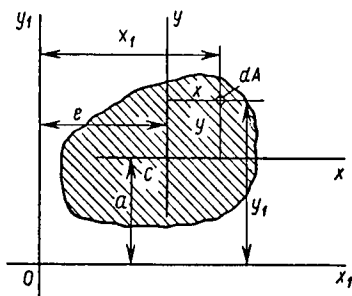


Рис. 2.52

Рассматривая каждый интеграл в отдельности, видим: $\int_A y_1^2 dA = J_{x_1}$ — момент инерции сечения относительно оси, параллельной центральной; $\int_A y^2 dA = J_x$ — центральный момент инерции сечения; $\int_A dA = A$ — площадь сечения; $\int_A y dA = S_x = 0$ — статический момент сечения относительно центральной оси, как известно, равен нулю.

Следовательно, в окончательном виде последнее равенство запишется так:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A. \quad (2.63)$$

Аналогично, из равенства $x_1 = x + e$ получим

$$J_{y_1} = J_y + e^2 A. \quad (2.64)$$

Таким образом, момент инерции сечения относительно оси, параллельной центральной, всегда больше центрального момента инерции на произведение квадрата расстояния между осями на площадь сечения.

§ 2.20. Понятие о главных центральных моментах инерции

Оси, относительно которых осевые моменты инерции сечения принимают экстремальные значения, а центробежный момент равен нулю, называются *главными*.

Допустим, что некоторое сечение расположено в осях $x_1 O y_1$, как показано на рис. 2.53, а. Ясно, что центробежный момент инерции $J_{x_1 y_1} > 0$, так как при таком положении сечения все элементарные центробежные моменты инерции $x_i y_i dA > 0$. При постепенном повороте осей (рис. 2.53, б) значение $J_{x_1 y_1}$ станет уменьшаться, так как для площадок dA_i над осью x_1 элементарные центробежные моменты инерции $x_i y_i dA_i > 0$, а для площадок dA_k ниже оси x_1 $x_k y_k dA < 0$, поскольку у этих площадок $y_k < 0$. Наконец, при определенном положении осей центробежный момент инерции $J_{x_1 y_1} = 0$. Оси $x_1 O y_1$ в этот момент занимают положение главных осей (рис. 2.53, б).

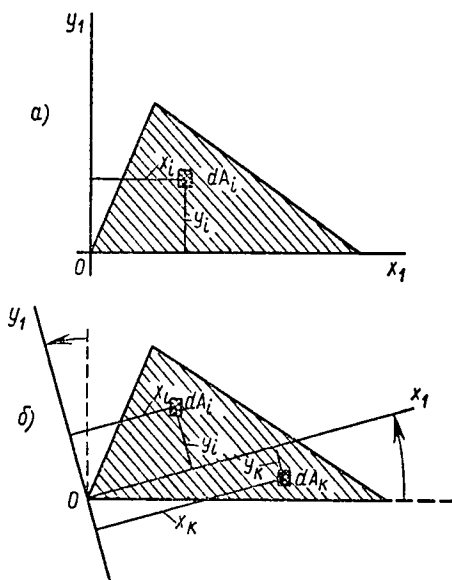


Рис. 2.53

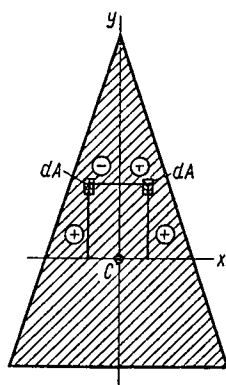


Рис. 2.54

Практическое значение имеют не любые главные оси, а только главные центральные оси. Положение главных центральных осей совсем просто находить для симметричных сечений. Центр тяжести симметричного сечения обязательно лежит на оси симметрии. Поэтому, если совместить с осью симметрии одну из осей координат, а другую провести к ней перпендикулярно через центр тяжести, получим систему главных центральных осей (рис. 2.54). По одну сторону оси симметрии имеется площадка dA с элементарным центробежным моментом инерции $+x y dA$, по другую сторону оси симметрии имеется площадка dA с элементарным центробежным моментом $-x y dA$ и при суммировании их по всему сечению $J_{xy} = 0$. Относительно одной из главных центральных осей момент инерции сечения максимален, а относительно второй — минимален. Для сечения на рис. 2.54 $J_{\max} = J_x$ и $J_{\min} = J_y$ (см. далее § 2.21).

Если сечение имеет две оси симметрии (например, прямоугольник), то обе они являются главными центральными, так как их пересечение определяет положение центра тяжести сечения. Многие сечения

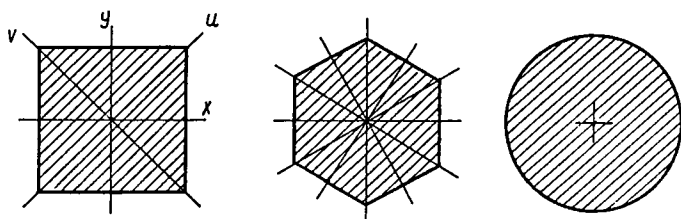


Рис. 2.55

имеют по две, три (и более) пары осей симметрии, которые можно принимать за главные центральные оси. Например, у квадрата (рис. 2.55) таких осей симметрии две пары, у правильного шестиугольника — три пары, а у круга — бесчисленное множество пар.

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей называются *главными центральными моментами инерции*. Плоскости, проведенные через ось бруса и главные оси инерции его поперечного сечения, называются *главными плоскостями*.

§ 2.21. Осевые моменты инерции простейших сечений

Прямоугольник. Прямоугольное сечение имеет две оси симметрии, а главные центральные оси S_x и S_y проходят через середины параллельных сторон (рис. 2.56). Главный центральный момент инерции относительно оси x

$$J_x = \int_A y^2 dA.$$

Элементарную площадку dA в этом случае можно представить в виде полоски во всю ширину сечения и толщиной dy , значит $dA = b \cdot dy$. Подставив под знак интеграла значение dA и проинтегрировав по всей площади, т. е. в пределах изменения ординаты y от $-h/2$ до $+h/2$, получим

$$\begin{aligned} J_x &= \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \\ &= b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{24} - \left(-\frac{bh^3}{24} \right). \end{aligned}$$

Окончательно

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.65)$$

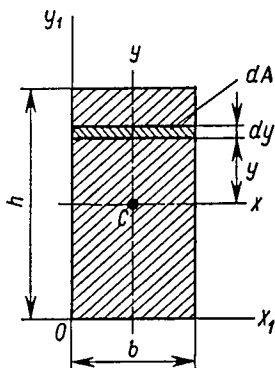


Рис. 2.56

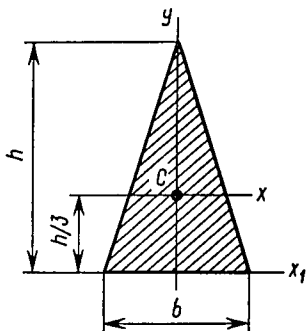


Рис. 2.57

Аналогично получим формулу главного центрального момента инерции прямоугольника относительно оси y :

$$J_y = \frac{b^3 h}{12}. \quad (2.66)$$

Иногда необходимо знать моменты инерций прямоугольника относительно осей x_1 и y_1 , параллельных главным центральным. Для получения этих значений воспользуемся формулами (2.63) и (2.64):

$$J_{x1} = J_x + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh;$$

$$J_{y1} = J_y + e^2 A = \frac{b^3 h}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh,$$

т. е.

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{3} \text{ и } J_{y1} = \frac{b^3 h}{3}. \quad (2.67)$$

Легко понять, что для квадрата, т. е. при $h=b$, формулы (2.65) и (2.66) примут вид

$$J_x = J_y = \frac{b^4}{12}, \quad (2.68)$$

а формулы (2.67) — вид

$$J_{x1} = J_{y1} = \frac{b^4}{3}. \quad (2.69)$$

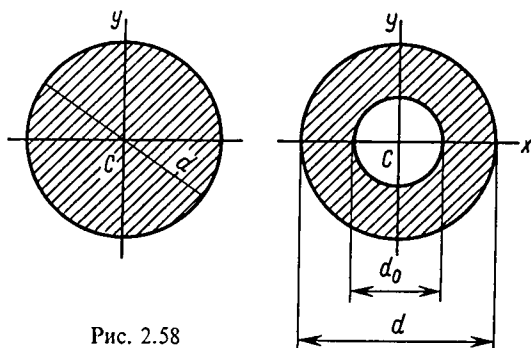


Рис. 2.58

Равнобедренный треугольник. Центр тяжести равнобедренного треугольника лежит на его оси симметрии на расстоянии $y_C = h/3$ от основания (рис. 2.57). Главные центральные моменты инерции сечения, имеющего форму равнобедренного треугольника, таковы:

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{b^3h}{48}. \quad (2.70)$$

Момент инерции треугольного сечения относительно оси x_1 , проходящей вдоль основания b ,

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.71)$$

Круг, кольцо. Для круга или кольца (рис. 2.58) главные центральные моменты инерции относительно осей x и y равны между собой. Поэтому из равенства (2.62), выражающего зависимость между осевыми и полярным моментами инерции, получаем

$$J_p = 2J_x = 2J_y \quad \text{или} \quad J = J_x = J_y = J_p/2.$$

Подставив значение J_p из формулы (2.41), получим для круглого сечения

$$J = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (2.72)$$

Для кольцевого сечения после подстановки из формулы (2.42) получим

$$J = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4), \quad (2.73)$$

где

$$c = \frac{d_0}{d}.$$

Следует заметить, что если у сечения два главных центральных момента инерции равны между собой (к таким сечениям относятся круг, кольцо, квадрат и т. п.), то у этих сечений любая центральная ось — главная и все центральные моменты инерции одинаковы.

Во многих конструкциях для отдельных элементов используют стальной прокат, форма и размеры которого предусмотрены соответствующими ГОСТами. Для проката с поперечными сечениями, отличными от таких простых геометрических фигур, как прямоугольник или круг, разработаны таблицы, содержащие все необходимые для расчетов характеристики.

Для стали прокатной угловой равнополочной (ГОСТ 8509—86) (рис. 2.59) в таблице указаны: размеры (мм) b , d , R и r ; площадь поперечного сечения (см^2); масса 1 м длины проката (кг); J_x и J_{x_1} — моменты инерции площадей сечений относительно осей x и x_1 ; $J_{x_0\max}$ и $J_{y_0\min}$ — моменты инерции относительно главных центральных осей (см^4); значение z_0 (см), определяющее положение центра тяжести профиля относительно оси x_1 , совмещенной с внешней гранью полки профиля.

Для стали прокатной неравнополочной (ГОСТ 8510—86) (рис. 2.60) кроме размеров B , b , d ,

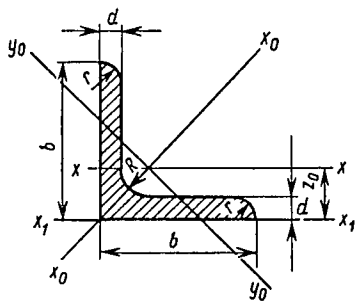


Рис. 2.59

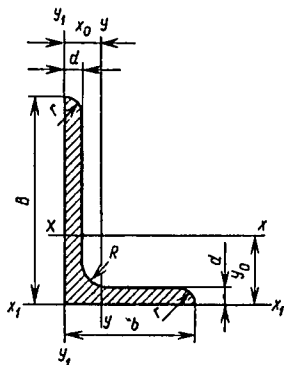


Рис. 2.60

R и r , площади поперечного сечения и массы 1 м проката приведены моменты инерции относительно осей x , y , x_1 и y_1 (J_x , J_y , J_{x1} и J_{y1}), а также значения x_0 и y_0 , определяющие положение центра тяжести сечения в осях x_1 и y_1 .

ГОСТ 8239—72* на стальные двутавровые балки (рис. 2.61) содержит данные о всех размерах, площади сечения и массе 1 м балки; значения J_x и J_y — моментов инерции относительно осей x и y , которые для этого сечения — главные центральные оси, а также значения W_x и W_y — моментов сопротивления сечения относительно тех же осей (см^3).

ГОСТ 8240—72* на стальные швеллеры с уклоном внутренних граней полок (рис. 2.62) содержит данные о размерах h , b , d , t , R , r , площади, массе, J_x , J_y , J_{y1} , W_x , W_y , а также значения z_0 , определяющие положение центра тяжести относительно оси y_1 . В каждом из четырех ГОСТов нумерация профилей соответствует основному размеру, выраженному в сантиметрах. Так, № 7,5 равнополочного уголка относится к профилю, у которого $b=75$ мм; № 6,3/4,0 неравнополочного уголка относится к профилю с размерами полок $B=63$ мм и $b=40$ мм; № 20 двутавра относится к профилю высотой $h=200$ мм, аналогична и нумерация швеллеров.

Пример 2.15. Определить главные центральные моменты инерции сечения, составленного из двух швеллеров № 18 (рис. 2.63).

Решение. 1. Сечение, составленное из профилей двух швеллеров, имеет две оси симметрии, с которыми и совместим главные оси x и y .

2. Ось x является главной центральной осью каждого из двух

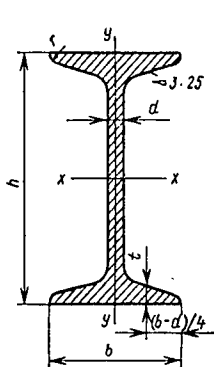


Рис. 2.61

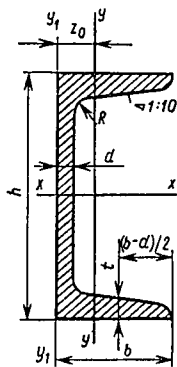


Рис. 2.62

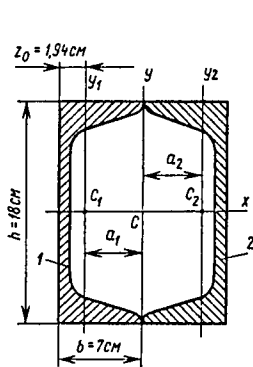


Рис. 2.63

швеллеров. Поэтому для определения главного центрального момента инерции сечения относительно этой оси достаточно сложить моменты каждого из профилей относительно той же оси. По таблицам ГОСТ 8240—72* находим $J_{1x} = J_{2x} = 1090 \text{ см}^4$.

Момент инерции всего сечения относительно оси x

$$J_x = J_{1x} + J_{2x} = 2 \cdot 1090 = 2180 \text{ см}^4.$$

3. Главная центральная ось сечения y параллельна осям C_1y_1 и C_2y_2 (рис. 2.63)—главным центральным осям каждого из профилей 1 и 2. Для определения главного момента инерции сечения воспользуемся формулой (2.64):

$$J_y = (J_{1y} + a_1^2 A_1) + (J_{2y} + a_2^2 A_2),$$

где (по ГОСТ 8240—72) $J_{1y} = J_{2y} = 86 \text{ см}^4$; расстояния между осями $a_1 = a_2 = b - z_0 = 7 - 1,94 = 5,06 \text{ см}$; площади профилей $A_1 = A_2 = 20,7 \text{ см}^2$. Следовательно,

$$J_y = 2(J_{1y} + a_1^2 A_1) = 2(86 + 5,06^2 \cdot 20,7) = 1232 \text{ см}^4.$$

4. Главные центральные моменты инерции сечения

$$J_{\max} = J_x = 2180 \text{ см}^4 \text{ и } J_{\min} = J_y = 1232 \text{ см}^4.$$

Пример 2.16. Определить главные центральные моменты инерции сечения, форма и размеры которого показаны на рис. 2.64, а.

Решение. 1. Сечение имеет одну ось симметрии, которую и примем за главную центральную ось y . Чтобы определить положение второй центральной оси (оси x), сначала необходимо определить положение центра тяжести сечения на оси y , т. е. ординату y_c относительно оси x_0 (рис. 2.64, б).

2. Для определения ординаты центра тяжести разобьем сечение на два прямоугольника I и II, считая, что прямоугольник II вырезан из прямоугольника I.

3. Определим площади прямоугольников, а также ординаты y_1 и y_2 их центров тяжести C_1 и C_2 , выражая размеры в сантиметрах:

$$A_1 = b_1 h_1 = 36 \cdot 50 = 1800 \text{ см}^2; \quad y_1 = \frac{h_1}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ см};$$

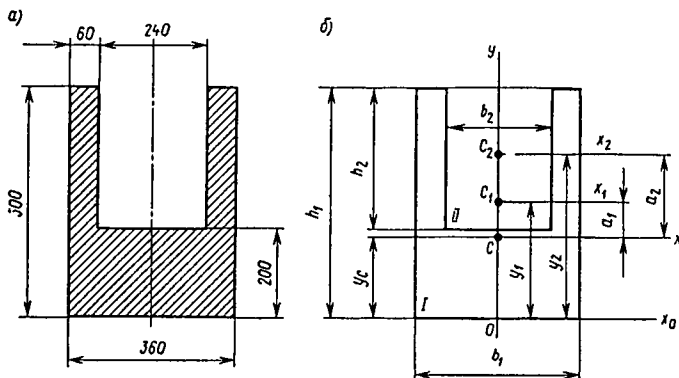


Рис. 2.64

$$A_2 = -b_2 h_2 = -24 \cdot 30 = -720 \text{ см}^2; \quad y_2 = h_1 - \frac{h_2}{2} = 50 - \frac{30}{2} = 35 \text{ см.}$$

Ордината центра тяжести сечения

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{1800 \cdot 25 - 720 \cdot 35}{1800 - 720} = 18,3 \text{ см.}$$

4. Отметим положение центра тяжести C на оси y и проведем главную центральную ось x .

5. Используя разбивку сечения на прямоугольники I и II , определим главный центральный момент инерции сечения относительно оси x . В данном случае искомый момент инерции равен разности моментов инерции прямоугольников I и II , так как второй вырезан из первого, т. е.

$$J_x = J_{Ix} - J_{2x}.$$

Центры тяжести C_1 и C_2 прямоугольников I и II не лежат на главной оси, поэтому для определения моментов инерции J_{1x} и J_{2x} используем формулу (2.64):

$$J_{ix} = J_{xi} + a_i^2 A_i,$$

где в данном случае $J_{xi} = \frac{b_i h_i^3}{12}$ — моменты инерции прямоугольников

относительно собственных центральных осей (осей $C_1 x_1$ и $C_2 x_2$). A_i — площади прямоугольников и a_i — расстояния между осями. Последние легко находятся из рис. 2.34, б;

$$a_1 = y_1 - y_c = 25 - 18,3 = 6,7 \text{ см;}$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 35 - 18,3 = 16,7 \text{ см.}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x1} - J_{x2} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1 - \left(\frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2 \right) = \\ &= \frac{36 \cdot 50^3}{12} + 6,7^2 \cdot 1800 - \frac{24 \cdot 30^3}{12} - 16,7^2 \cdot 720 \approx 201\,000 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

6. Находим J_y — главный центральный момент инерции относительно оси y , которая в данном случае является главной осью для обоих прямоугольников I и II . Значит,

$$J_y = J_{y1} - J_{y2} = \frac{b_1^3 h_1}{12} - \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{36^3 \cdot 50}{12} - \frac{24^3 \cdot 30}{12} = 160\,000 \text{ см}^4.$$

$$7. J_{\max} = J_x = 201\,000 \text{ см}^4 \quad \text{и} \quad J_{\min} = J_y = 160\,000 \text{ см}^4.$$

Вопросы для самопроверки

1. Почему статический момент любого сечения относительно центральной оси равняется нулю?

2. Чему равен полярный момент инерции прямоугольного сечения со сторонами 4 и 5 см: а) относительно его центра тяжести;

б) относительно одной из вершин сечения? (Ответ: а) 120 см^4 ; б) 416 см^4 .)

3. Во сколько раз момент инерции треугольника относительно оси, проходящей вдоль его основания, меньше момента инерции относительно оси, проходящей через вершину параллельно основанию? (Ответ: в 3 раза.)

ГЛАВА 6. ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

§ 2.22. Прямой изгиб чистый и поперечный

Прямым чистым изгибом называют такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — изгибающий момент. Если кроме изгибающего момента возникает поперечная сила, то имеет место *прямой поперечный изгиб*. Все внешние силы при прямом изгибе бруса действуют в его главной плоскости (рис. 2.65), искривление оси бруса происходит в той же плоскости.

Брус, работающий на изгиб, называют *балками*. На расчетной схеме балку принято заменять ее осью. При этом все силы должны быть приведены к оси балки, а силовая плоскость (плоскость действия нагрузки) — совпадать с плоскостью чертежа.

Придав балке, представленной на рис. 2.65, условное изображение (рис. 2.66, а), определим внутренние силовые факторы в ее поперечных сечениях. В соответствии с местом приложения нагрузок — пары сил с моментом M_0 , сосредоточенной силы F и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q — разделим балку на три участка: *I*, *II* и *III*. Рассечем балку на участке *I* сечением, расположенным на расстоянии x от места приложения момента M_0 , и отбросим правую часть балки (рис. 2.66, б). Тогда на основании уравнения (2.1)

$$Q_{yI} = 0,$$

поскольку проекции сил, образующих пару, на ось x равны нулю и равновесие оставшейся части балки обеспечивается одним изгибающим моментом M_z . При изменении x от 0 до a , т. е. в любом сечении на участке *I* (при $0 \leq x \leq a$), изгибающий момент

$$M_{zI} = M_0.$$

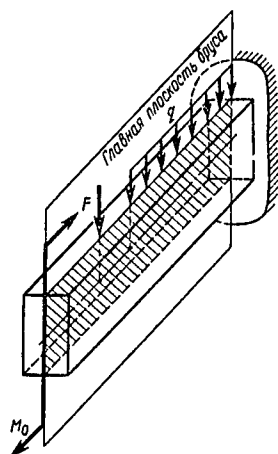


Рис. 2.65

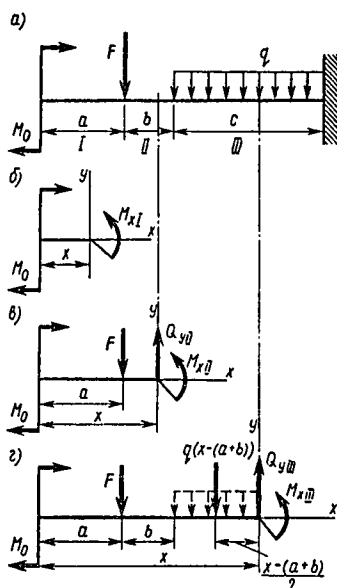


Рис. 2.66

Следовательно, участок *I* балки находится в состоянии чистого изгиба.

Рассечем балку на участке *II* сечением, расположенным на расстоянии x [теперь $a \leq x \leq (a+b)$] от левого конца балки, и, отбросив ее правую часть (рис. 2.66, в), найдем, что поперечная сила равна проекции внешней силы на ось y , т. е.

$$Q_{yII} = -F,$$

а изгибающий момент равен алгебраической сумме момента пары и момента силы F относительно центра тяжести сечения:

$$M_{zII} = M_0 - F(x-a).$$

Действие момента $F(x-a)$ противоположно действию момента M_0 , поэтому он взят со знаком минус. Балка на участке *II* находится в состоянии поперечного изгиба, так как в сечениях этого участка возникают поперечная сила и изгибающий момент. Заметим, что в данном случае значение поперечной силы Q_{yII} на участке *II* не зависит от x , т. е. в любом сечении $Q_{yII} = -F = \text{const.}$ Числовое значение изгибающего момента находится в линейной зависи-

мости от x , т. е. изменяется при переходе от одного сечения к другому.

Рассечем балку на участке *III* сечением на расстоянии $x [(a+b) \leq x \leq (a+b+c)]$ от левого ее конца и, отбросив правую часть (рис. 2.66, z), найдем поперечную силу

$$Q_{yIII} = -F - q[x - (a+b)]$$

и изгибающий момент

$$M_{zIII} = M_0 - F(x-a) - q[x - (a+b)] \frac{[x - (a+b)]}{2},$$

или

$$M_{zIII} = M_0 - F(x-a) - q \frac{[x - (a+b)]^2}{2}.$$

На этом участке возникает тоже поперечный изгиб. Причем из-за наличия здесь равномерно распределенной нагрузки поперечная сила зависит от места сечения на участке: по мере передвижения сечения вправо (при возрастании x) увеличивается абсолютное значение второго слагаемого $q[x - (a+b)]$; изгибающий момент меняется в зависимости от x по параболическому закону.

Между изгибающим моментом M_z , поперечной силой Q и интенсивностью q равномерно распределенной нагрузки существуют следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q \quad (2.74)$$

— производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе;

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (2.75)$$

— производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности равномерно распределенной нагрузки, взятой с обратным знаком.

Справедливость этих зависимостей можно проверить для значений M_z и Q_y , найденных, например, для участка *III* балки (рис. 2.66, z), которым можно придать такой вид:

$$M_{zIII} = M_0 - Fx + Fa - \frac{qx^2}{2} + xq(a+b) - \frac{q(a+b)^2}{2};$$

$$Q_{yIII} = -F - qx + q(a+b).$$

Продифференцируем первое выражение по x , имея в виду, что M_0 , F , a , b и q — величины постоянные:

$$dM_z/dx = -F - qx + q(a+b) = Q_{yIII}.$$

Продифференцировав выражение поперечной силы, получим

$$dQ_y/dx = -q^*.$$

Из дифференциальных зависимостей (2.74) и (2.75) следует: 1) если $M_z = \text{const}$, то $Q = 0$; 2) если $Q = \text{const}$, то $q = 0$, а M_z изменяется по линейному закону, причем при $Q > 0$ M_z возрастает, а при $Q < 0$ — убывает; 3) если Q изменяется по линейному закону, то M_z изменяется по параболическому закону.

§ 2.23. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Определяя поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z в различных сечениях балки (рис. 2.66), мы видим, что их значения изменяются по длине балки в зависимости от вида нагрузок и места их приложения. При расчетах часто бывает важно знать изменение Q и M_z в сечениях по всей длине балки, а этого можно достичь построением эпюр.

Исходя из того, что при поперечном изгибе направление внешних сил перпендикулярно оси балки, а при ее рассечении можно отбросить любую часть — правую или левую, сформулируем следующие правила определения значений Q_y и M_z .

Поперечная сила Q_y в произвольном поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме значений внешних сил, приложенных к балке по одну сторону от сечения, при этом *силам, поворачивающим относительно сечения оставленную часть балки по ходу часовой стрелки, приписывается знак плюс* (рис. 2.67, а), а *силам, поворачивающим относительно*

* Если действие равномерно распределенной нагрузки совпадает с положительным направлением оси y , то $dQ/dz = q$.

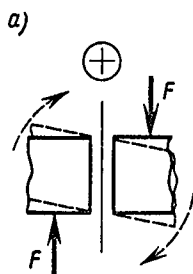


Рис. 2.67

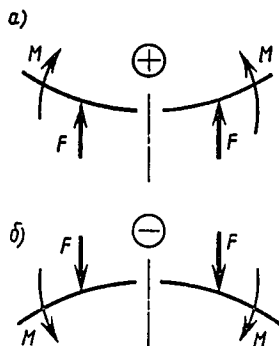
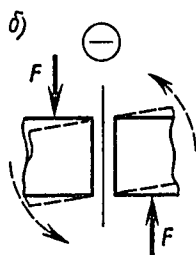


Рис. 2.68

сечения оставленную часть балки против хода часовой стрелки, приписывается знак минус (рис. 2.67, б).

Изгибающий момент M_z в произвольном поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно той точки оси бруса, через которую проходит сечение, при этом внешним моментам, изгибающим ось балки выпуклостью вниз, приписывается знак плюс (рис. 2.68, а), а моментам, изгибающим ось балки выпуклостью вверх, — знак минус (рис. 2.68, б).

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр Q_y и M_z при типовых нагружениях балки.

Балка, защемленная одним концом (консоль) и нагруженная двумя численно равными силами, как показано на рис. 2.69, а, имеет участки I и II. Применяя метод сечений и используя правило знаков (см. рис. 2.67 и 2.68), находим, что на участке I (рис. 2.69, б) поперечная сила

$$Q_{yI} = F,$$

т. е. не зависит от x . Следовательно, эпюра Q_y на участке I изобразится отрезком прямой, параллельной базовой линии.

На участке II (рис. 2.69, б) поперечная сила

$$Q_{yII} = F - F = 0.$$

Эпюра Q_y по всей длине балки изображена на рис. 2.69, г.

Изгибающий момент на участке I (рис. 2.69, б)

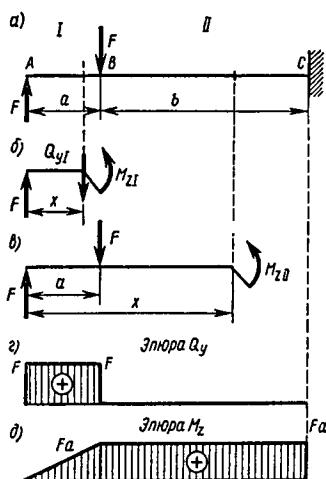


Рис. 2.69

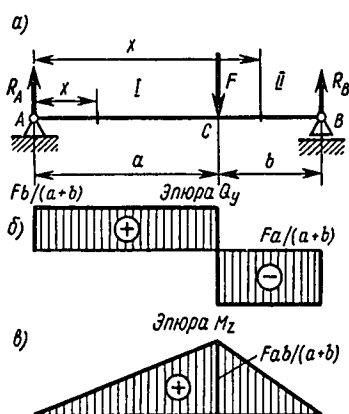


Рис. 2.70

$$M_{zI} = Fx,$$

т. е. при изменении x от 0 до $(0 \leq x \leq a)$ значение M_{zI} равномерно увеличивается от 0 до Fa , т. е. $M_{zA} = 0$, $M_{zB} = Fa$.

На участке II (рис. 2.69, в) значение изгибающего момента

$$M_{yII} = Fx - F(x - a) = Fa.$$

Эпюра M_z по всей длине балки изображена на рис. 2.69, д. Как видим, в поперечных сечениях балки на участке II возникает только один внутренний силовой фактор — изгибающий момент; следовательно, участок II находится в состоянии чистого изгиба. Эпюры Q_y и M_z на рис. 2.69 иллюстрируют справедливость следствий 2 и 1, сформулированных в § 2.22: на участке I $Q_{yI} = F = \text{const}$, причем $Q_{yI} > 0$, а M_{zI} возрастает по линейному закону; на участке II $Q_{yII} = 0$ и значение $M_{zII} = Fa = \text{const}$.

Двухопорная балка нагружена между опорами A и B силой F (рис. 2.70, а). В отличие от предыдущего случая здесь предварительно необходимо определить реакции R_A и R_B опор балки. Из уравнения моментов относительно опоры B находим $R_A = Fb/(a+b)$, а из уравнения моментов относительно опоры A находим $R_B = Fa/(a+b)$.

Балка имеет два участка. Рассекая балку на участке I и отбрасывая часть балки правее сечения, находим

$$Q_{yI} = R_A = \frac{Fb}{a+b} \text{ и } M_{zI} = R_A x = \frac{Fbx}{a+b}.$$

Таким образом, на участке I поперечная сила постоянна и равна $Fb/(a+b)$ (рис. 2.70, б), а изгибающий момент при изменении x от 0 до a ($0 \leq x \leq a$) увеличивается от 0 до $Fab/(a+b)$ (рис. 2.70, в).

Рассекая балку на участке II и отбрасывая часть балки правее сечения, находим:

$$Q_{yII} = R_A - F = \frac{Fb}{a+b} - F = \frac{-Fa}{a+b};$$

$$M_{zII} = R_A x - F(x-a) = \frac{Fbx}{a+b} - F(x-a).$$

Поперечная сила на участке II имеет значение, равное $-Fa/(a+b) = -R_B$ (рис. 2.70, б). На участке II x изменяется в пределах $a \leq x \leq (a+b)$. Поэтому при $x=a$ изгибающий момент $M_{zc} = Fab/(a+b)$, а при $x=a+b$

$$M_{zB} = \frac{Fb(a+b)}{a+b} - F(a+b-a) = 0,$$

т. е. при изменении x от 0 до $(a+b)$ изгибающий момент убывает от $Fab/(a+b)$ до 0 (рис. 2.70, в).

Эпюры Q_y и M_z на рис. 2.70 иллюстрируют справедливость следствия 2 (см. § 2.22): равномерно распределенной нагрузки на балке нет ($q=0$) и на каждом из обоих участков балки Q_y сохраняет постоянное значение, поэтому M_z на том и на другом участке изменяется по линейному закону, но $Q_{yI} > 0$ и на участке I M_z возрастает, а $Q_{yII} < 0$ и на участке II M_z убывает.

Двухопорная балка нагружена между опорами парой сил, момент которой M (рис. 2.71, а). Действующую на балку пару сил можно уравновесить только парой. Поэтому реакции опор образуют пару сил (R_A, R_B) и $R_A = R_B = M/(a+b)$.

Рассекая балку на участке I , а затем на участке II и отбрасывая в обоих случаях правую часть балки, получаем

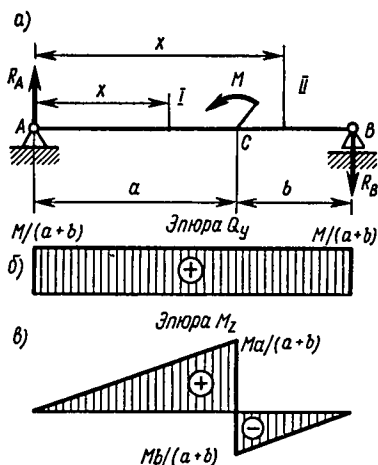


Рис. 2.71

$$Q_{yI} = Q_{yII} = R_A = M/(a+b),$$

т. е. значение поперечной силы Q_y по всей длине балки постоянно (рис. 2.71, б). Изгибающий момент на участке I

$$M_{zI} = R_A x = \frac{Mx}{a+b}$$

и при изменении x от 0 до a ($0 \leq x \leq a$) значение изгибающего момента увеличивается от 0 до $Ma/(a+b)$.

Изгибающий момент на участке II

$$M_{zII} = R_A x - M = \frac{Mx}{a+b} - M.$$

При $x=a$ получим $M_{xCII} = Ma/(a+b) - M = -Mb/(a+b)$; при $x=a+b$ $M_{xB} = M(a+b)/(a+b) - M = 0$.

Следовательно, при изменении x в пределах $a \leq x \leq (a+b)$ значение M_{zII} увеличивается от $-Mb/(a+b)$ до 0.

Таким образом, в сечении балки, где приложена пара сил с моментом M , на эпюре M_z возникает скачок от $Ma/(a+b)$ до $-Mb/(a+b)$ (рис. 2.71, в), т. е. на значение момента приложенной пары.

Эпюры на рис. 2.70 еще раз иллюстрируют справедливость положения, что при $Q = \text{const}$ и $Q > 0$

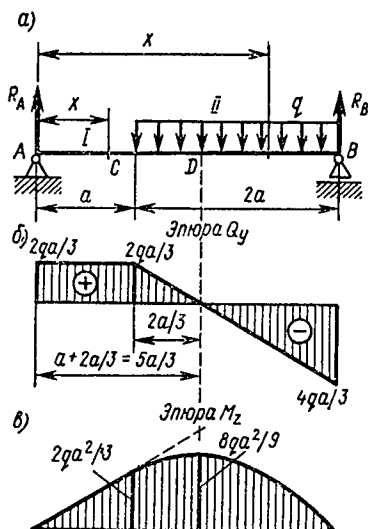


Рис. 2.72

изгибающий момент M_z возрастает по линейному закону (см. § 2.22, следствие 2).

Двухопорная балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , как показано на рис. 2.72, а. Реакции опор A и B этой балки: $R_A = \frac{2qa}{3}$ и

$R_B = \frac{4qa}{3}$. Как и в предыдущих случаях, балка имеет два участка.

На участке I $Q_{yI} = R_A = \frac{2qa}{3} = \text{const}$;

$$M_z = R_A x = \frac{2qax}{3}$$

и при изменении x в пределах $0 \leq x \leq a$ изгибающий момент увеличивается по линейному закону от $M_{zA} = 0$ в сечении над опорой A до $M_{zC} = \frac{2qa^2}{3}$ в сечении, проходящем через точку C .

На участке II $Q_{yII} = R_A - q(x-a) = \frac{2}{3}qa - q(x-a)$;

$$M_{zII} = R_A x - q(x-a)(x-a)/2 = \frac{2}{3}qax - q(x-a)^2/2.$$

Как видим, на участке II и поперечная сила и изгибающий момент изменяются в зависимости от x . При изменении x в интервале $a \leq x \leq 3a$ поперечная сила изменяется по линейному закону от $Q_{yc} = 2qa/3$ в сечении, проведенном через точку C , до $Q_{yb} = (2/3)qa - q(3a - a) = -4qa/3$ в сечении над опорой B , проходя в некотором сечении балки через нулевое значение (рис. 2.72, б). Положение сечения, где $Q_y = 0$, необходимо определить, так как исходя из дифференциальной зависимости (2.74) в сечении, где поперечная сила изменяет знак, переходя от $Q_y > 0$ к $Q_y < 0$, изгибающий момент достигает максимального значения.

Из уравнения $Q_{yII} = 2qa/3 - q(x - a) = 0$ следует, что сечение D , в котором $Q_y = 0$ (рис. 2.72, а, б), отстоит от левой опоры A на расстоянии

$$x = a + \frac{2a}{3} = \frac{5a}{3}.$$

Изгибающий момент, как видно из приведенного выше равенства, есть квадратичная функция от x , поэтому на участке, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой, эпюра изгибающего момента изображается параболой:

$$\text{при } x = a \text{ в сечении } C \quad M_{zc} = \frac{2}{3}qa^2;$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = \frac{5}{3}a \text{ в сечении } D \quad M_{zd} &= \frac{2qa}{3} \cdot \frac{5a}{3} - \frac{q}{2} \left(\frac{5a}{3} - a \right)^2 = \\ &= \frac{8qa^2}{9}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = 3a \text{ в сечении } B \quad M_{zb} &= \frac{2qa}{3} \cdot 3a - \frac{q}{2}(3a - a)^2 = \\ &= 2qa^2 - 2qa^2 = 0 \quad (\text{рис. 2.72, в}). \end{aligned}$$

Построение эпюры иллюстрирует справедливость следствий 2 и 3 из § 2.22, вытекающих из дифференциальных зависимостей между M_z , Q_y и q .

Сформулируем основные правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, которые являются как следствиями дифференциальных зависимостей q , Q и M_z , так и вытекают непосредственно из метода сечений.

1. На участке балки без равномерно распределенной нагрузки ($q = 0$) поперечная сила $Q = \text{const}$ и ее

эпюра изображается отрезком прямой, параллельным базовой линии, а изгибающий момент изменяется по линейному закону и эпюра M_z изображается наклонным к базовой линии отрезком прямой.

2. На участке балки, несущем равномерно распределенную нагрузку, поперечная сила Q изменяется по линейному закону и ее эпюра изображается наклонной прямой, а изгибающий момент изменяется по квадратичному закону и его эпюра изображается дугой параболы, выпуклость которой обращена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки.

3. Если на участках, указанных в п. 1 и 2, $Q > 0$, то изгибающий момент возрастает; если $Q < 0$, то изгибающий момент убывает; если $Q = 0$, то изгибающий момент постоянен.

4. Если поперечная сила, изменяясь по линейному закону, проходит через нулевое значение, то в сечении, где $Q = 0$, изгибающий момент достигает экстремального значения: максимального — при переходе слева направо от $Q > 0$ к $Q < 0$ и минимального — при переходе также слева направо от $Q < 0$ к $Q > 0$.

5. Если границей участка балки служит точка приложения сосредоточенной силы F , то эпюра Q в этом месте изменяется скачкообразно на значение F , а на эпюре M_z возникает излом, т. е. происходит резкое изменение угла наклона отрезка прямой или дуги параболы.

6. Если границей участка балки служит точка приложения сосредоточенной пары сил, то на эпюре Q это не отражается, а на эпюре M_z возникает скачок, равный значению момента пары.

7. Если границей участка служит начало или окончание действия равномерно распределенной нагрузки, то на эпюре Q возникает излом (переход от параллельного к базовой линии отрезка к наклонному или, наоборот, от наклонного к параллельному), а на эпюре M_z прямолинейный и параболический участки сопрягаются плавно (прямолинейный участок является касательным к дуге параболы в их общей точке).

8. В сечении на свободном или шарнирно опертom конце балки изгибающий момент равен нулю, если в этом месте не приложена сосредоточенная пара сил.

Поперечная сила в этом сечении равна внешней сосредоточенной силе.

9. В сечении, совпадающем с заделкой, значения Q и M_z , получившиеся на эпюрах, равны соответственно опорной реакции и реактивному моменту.

При построении эпюр Q и M_z рекомендуется придерживаться такой последовательности:

1) найти опорные реакции (для консоли их можно не находить);

2) разбить брус на участки, границами которых являются сечения, в которых приложены сосредоточенные силы и пары и начинается или заканчивается распределенная нагрузка. Такие сечения принято называть *характерными*;

3) применяя метод сечений, построить эпюру поперечных сил. Если поперечная сила, изменяясь непрерывно, проходит через нулевое значение, то необходимо определить абсциссу сечения, где Q обращается в нуль;

4) вычислить в характерных сечениях значения изгибающих моментов и по найденным ординатам построить эпюру M_z .

Пример 2.17. Построить эпюры Q , и M_z для двухопорной балки, нагруженной, как показано на рис. 2.73, а.

Решение. 1. Определяем реакции опор R_A и R_B . Из уравнения моментов относительно точки B

$$-R_A \cdot AB + F \cdot CB + M = 0$$

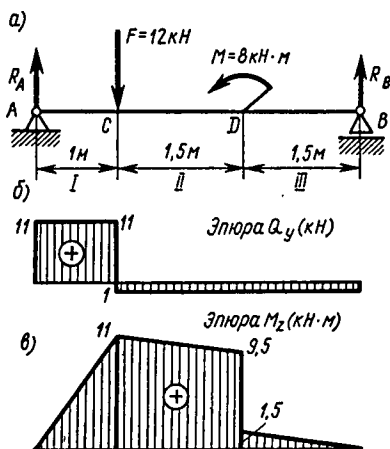


Рис. 2.73

находим

$$R_A = \frac{F \cdot CB + M}{AB} = \frac{12 \cdot 3 + 8}{4} = 11 \text{ кН.}$$

Из уравнения моментов относительно точки A

$$-F \cdot AC + M + R_B \cdot AB = 0$$

находим

$$R_B = \frac{F \cdot AC - M}{AB} = \frac{12 \cdot 1 - 8}{4} = 1 \text{ кН.}$$

Алгебраическая сумма проекций всех внешних сил на ось, перпендикулярную балке,

$$R_A - F + R_B = 11 - 12 + 1 = 0.$$

Следовательно, реакции опор определены правильно.

2. Разбиваем балку на три участка. Характерными являются сечения A , C , D и B .

3. Так как все участки балки свободны от распределенной нагрузки, то поперечные силы на каждом участке постоянны и эпюра изобразится прямыми, параллельными базовой линии. Применяя метод сечений, определим значения поперечных сил на каждом участке:

$$Q_{yI} = R_A = 11 \text{ кН}; \quad Q_{yII} = R_A - F = 11 - 12 = -1 \text{ кН};$$

$$Q_{yIII} = R_A - F = 11 - 12 = -1 \text{ кН.}$$

По полученным данным строим эпюру Q_y (рис. 2.73, б).

4. Для построения эпюры M_z , применяя метод сечений, вычислим значения изгибающих моментов в характерных сечениях. При этом каждый раз рассматриваем равновесие левой отсеченной части (можно рассматривать правую часть или ту и другую части поочередно — результаты будут те же):

$$M_{zA} = 0; \quad M_{zC} = R_A \cdot AC = 11 \cdot 1 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{zDII} = R_A \cdot AD - F \cdot CD = 11 \cdot 2,5 - 12 \cdot 1,5 = 9,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{zDIII} = R_A \cdot AD - F \cdot CD - M = 11 \cdot 2,5 - 12 \cdot 1,5 - 8 = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{zB} = R_A \cdot AB - F \cdot CB - M = 11 \cdot 4 - 12 \cdot 3 - 8 = 0.$$

По полученным данным строим эпюру M_z (рис. 2.73, в).

Рассматривая эпюры Q_y , M_z и нагрузку на балку с точки зрения общих правил построения эпюр, обнаруживаем, что построение не содержит ошибок: например, где $Q > 0$ (участок I), момент M_z возрастает; где $Q < 0$ (участки II и III), он убывает; в сечении C на эпюре Q_y имеет место скачок, равный значению приложенной сосредоточенной силы (12 кН), а в эпюре M_z — излом, причем острие излома направлено против силы; в сечении D , где приложена пара сил, на эпюре M_z наблюдается скачок, равный моменту пары сил (8 кН·м), а в эпюре Q_y нет никаких изменений.

Пример 2.18. Построить эпюры Q_y и M_z для двухопорной балки, нагруженной, как показано на рис. 2.74, а.

Решение. 1. Из уравнения моментов относительно правой опоры

$$-R_A \cdot AB + F \cdot BC + q \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} = 0$$

находим

$$R_A = F \cdot \frac{BC}{AB} + q \cdot \frac{AB}{2} = \frac{10 \cdot 3}{5} + \frac{8 \cdot 5}{2} = 26 \text{ кН.}$$

Из уравнения моментов относительно левой опоры

$$R_B \cdot AB - F \cdot AC - q \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} = 0$$

находим

$$R_B = F \cdot \frac{AC}{AB} + q \cdot \frac{AB}{2} = \frac{10 \cdot 2}{5} + \frac{8 \cdot 5}{2} = 24 \text{ кН.}$$

Проверяя по уравнению проекций на вертикальную ось

$$R_A - F - q \cdot AB + R_B = 26 - 10 - 8 \cdot 5 + 24 = 0,$$

убеждаемся, что реакции опор определены правильно.

2. Разбиваем балку на два участка. Характерные сечения: *A*, *C* и *B*.

3. Применяя метод сечений, строим эпюры Q_y . Балка по всей длине несет равномерно распределенную нагрузку; следовательно, значение поперечной силы изменяется по линейному закону и ее эпюра изобразится наклонным отрезком прямой со скачком под сосредоточенной нагрузкой F . В сечении правее опоры *A* при

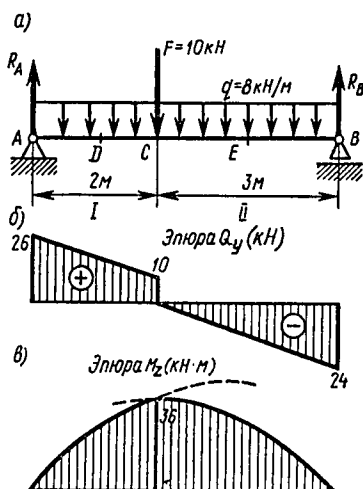


Рис. 2.74

рассмотрении левой части балки

$$Q_{zA} = R_A = 26 \text{ кН.}$$

В сечении левее C (при рассмотрении левой части балки)

$$Q_{yCI} = R_A - q \cdot AC = 26 - 8 \cdot 2 = 10 \text{ кН.}$$

В сечении левее опоры B (при рассмотрении правой части балки)

$$Q_{yB} = -R_B = -24 \text{ кН.}$$

В сечении правее C (при рассмотрении правой части балки)

$$Q_{yCII} = -R_B + q \cdot BC = -24 + 8 \cdot 3 = 0.$$

По полученным данным строим эпюру Q_y (рис. 2.74, б). Образовавшийся под сечением C в эпюре Q_y скачок, равный значению силы $F = 10 \text{ кН}$, подтверждает правильность построения эпюры поперечных сил.

4. Строим эпюру M_z (рис. 2.74, в). Так как на всех участках нагрузка распределенная, то эпюра изгибающих моментов должна иметь вид параболы с выпуклостью навстречу нагрузке и переломом под сечением C , где приложена сосредоточенная сила. При этом на участке I , где $Q > 0$, M_z возрастает, а на участке II , где $Q < 0$, M_z убывает.

Применяя метод сечений, определяем значения изгибающих моментов в характерных сечениях. В сечении A $M_{xA} = 0$. В сечении C при рассмотрении левой отсеченной части

$$M_{zC} = R_A \cdot AC - q \cdot \frac{AC^2}{2} = 26 \cdot 2 - \frac{8 \cdot 2^2}{2} = 36 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В том же сечении при рассмотрении правой отсеченной части

$$M_{zC} = R_B \cdot CB - q \cdot \frac{BC^2}{2} = 24 \cdot 3 - \frac{8 \cdot 3^2}{2} = 36 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Совпадение значений M_{zC} , найденных слева и справа, подтверждает правильность построения эпюры M_z . Таким образом, эпюра M_z для заданной балки изображается восходящей дугой параболы на участке AC и нисходящей дугой другой параболы на участке CB . При этом $\max M_z = 36 \text{ кН} \cdot \text{м.}$

§ 2.24. Основные расчетные предпосылки и формулы при изгибе

Выше установлено, что при чистом изгибе в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения. Для выяснения закона их распределения по поперечному сечению балки и вывода формулы, определяющей напряжение в произвольной точке поперечного сечения, введем следующие допущения: 1) *перпендикулярное оси недеформированного бруса плоское сечение остается и после изгиба плоским и нормальным к изогнутой оси бруса (гипотеза плоских*

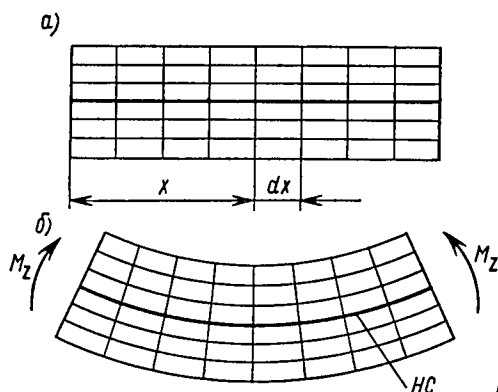


Рис. 2.75

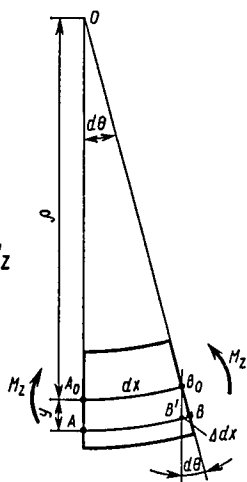


Рис. 2.76

сечений); 2) *продольные волокна бруса при его деформации не надавливают друг на друга.*

Картина деформированного состояния при чистом изгибе, подтверждающая гипотезу плоских сечений, хорошо видна на резиновой модели бруса прямоугольного сечения с нанесенной на боковой грани сеткой из продольных и поперечных линий (рис. 2.75, а), имитирующих продольные слои и поперечные сечения бруса. При нагружении обоих концов бруса противоположно направленными парами сил продольные линии искривляются, образуя дуги окружности, а поперечные, оставаясь прямыми, лишь поворачиваются на некоторый угол (рис. 2.75, б).

Таким образом, при чистом изгибе поперечные сечения поворачиваются и продольные слои бруса у выпуклой части бруса удлиняются, а у вогнутой — укорачиваются. Очевидно, что где-то должен находиться слой, первоначальная длина которого не изменилась. Этот слой называется *нейтральным* (НС на рис. 2.75, б). Его положение пока не известно.

Возьмем в брус (рис. 2.75) два смежных поперечных сечения, расположенных одно от другого на расстоянии dx , и допустим, что при изгибе между ними образовался угол $d\theta$ (рис. 2.76), вершина которого лежит в центре кривизны нейтрального слоя.

Кривизна нейтрального слоя

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}. \quad (2.76)$$

Из рис. 2.76 ясно, что отрезок AB произвольного слоя изогнутого бруса получил удлинение $\Delta dx = -B'B = d\theta \cdot y$, где y — расстояние этого слоя от нейтрального. Тогда по формуле (2.7) находим

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \cdot y,$$

или с учетом равенства (2.76)

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (2.77)$$

Для перехода от деформаций к напряжениям применим закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}. \quad (2.78)$$

Возможность применения закона Гука в рассмотренной форме обусловлена принятым допущением о ненадавливании волокон балки друг на друга, т. е. предположением, что каждое из них находится в состоянии одноосного растяжения или сжатия.

Выражение (2.78) показывает, что нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения прямо пропорционально ее расстоянию y от нейтральной оси. Графическое толкование формулы (2.78) показано на рис. 2.77. Линия пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением называется *нейтральной осью* (НО). В точках, расположенных на нейтральной оси, $\sigma = 0$ (поскольку для этих точек $y = 0$) и в любых других точках сечения нормальные напряжения пропорциональны их удалению от нейтрального слоя, т. е. они изменяются по линейному закону. Если, как обычно, напряжение растяжения направить от сечения, а напряжение сжатия — к сечению, то получим картину распределения напряжений, показанную на рис. 2.77.

Положение нейтральной оси определим из условия, что нормальная сила в поперечном сечении при чистом изгибе равна нулю. Разбив поперечное сечение на множество элементарных площадок dA (рис. 2.78)

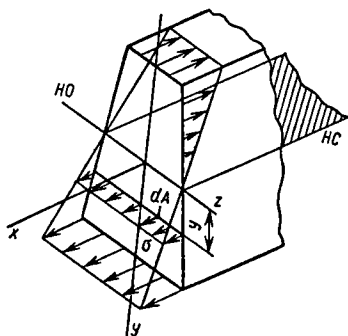


Рис. 2.77

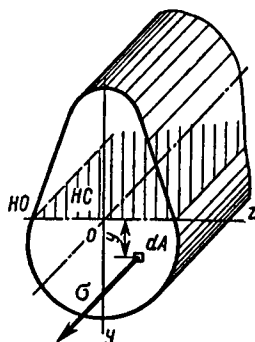


Рис. 2.78

и просуммировав элементарные продольные силы

$$\sigma dA = \frac{E y dA}{\rho}$$

по всей площади сечения, получим

$$N = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Вынесенная за знак интеграла постоянная величина $E/\rho \neq 0$, поскольку радиус кривизны деформированного бруса не равен бесконечности. Следовательно, это равенство имеет смысл лишь при

$$\int_A y dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент поперечного сечения относительно нейтральной оси. Из § 2.19 известно, что статический момент сечения равен нулю лишь относительно центральной оси. Следовательно, *нейтральная ось совпадает с центральной осью z*. В рассматриваемом случае (рис. 2.78) силовая линия (ось Oy) совпадает с осью симметрии сечения, т. е. является одной из главных центральных осей. Нейтральная ось ей перпендикулярна и проходит, как мы установили, через центр тяжести, т. е. это вторая главная центральная ось. Опуская доказательство, можно утверждать, что *при прямом изгибе, т. е. в случае, когда силовая плоскость совпадает с главной плоскостью, нейтральная ось совпадает с главной центральной осью*.

Для определения радиуса кривизны нейтрального слоя используем зависимость между изгибающим моментом и нормальными напряжениями:

$$M_z = \int_A \sigma y dA,$$

где dA — элементарная площадка поперечного сечения (рис. 2.78); σdA — элементарная нормальная сила; $\sigma dA \cdot y = \sigma y dA$ — элементарный момент внутренних сил относительно оси z . Подставив вместо σ его выражение из (2.78), находим

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA,$$

где $\int_A y^2 dA = J_z$ — момент инерции сечения относительно оси z [см. формулу (2.60)]. Таким образом,

$$M_z = \frac{1}{\rho} EJ_z. \text{ Отсюда}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (2.79)$$

По этой формуле определяется *кривизна изогнутой оси бруса, характеризующая деформацию изгиба*. Здесь величина EJ_x называется *жесткостью сечения бруса при изгибе*.

Исключив ρ из равенств (2.78) и (2.79), получим формулу для определения нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z}. \quad (2.80)$$

Формула (2.80), выведенная из рассмотрения прямого чистого изгиба, как показывают исследования, вполне приемлема и для определения нормальных напряжений при поперечном изгибе.

§ 2.25. Расчеты на прочность

Балки рассчитывают на прочность по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. При поперечном изгибе балок наряду с нормальными возникают и касательные напряжения, обусловленные наличием поперечной силы, но они в подавляющем большинстве случаев невелики и при расчетах на прочность не учитываются.

Прочность балки обеспечена, если наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения, возникающие в опасном сечении, не превышают допустимых. Для балки, поперечные размеры которой по всей длине постоянны, опасное сечение то, в котором возникает наибольший по модулю изгибающий момент. Наибольшие нормальные напряжения возникают в точках опасного поперечного сечения, максимально удаленных от нейтральной оси. Эти точки принято называть *опасными*. Значения максимальных напряжений в опасных точках найдем по формуле (2.80):

$$\max \sigma_p = \frac{M_z y_1}{J_z}; \quad \max \sigma_c = \frac{M_z y_2}{J_z},$$

где y_1 и y_2 — расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных точек соответственно в растянутой и сжатой зонах сечения.

Если материал балки хрупкий, например закаленная сталь, чугун, текстолит и др., то расчет на прочность при изгибе проводят по напряжениям растяжения и сжатия. У хрупких материалов (см. § 2.9) предел прочности при сжатии выше предела прочности при растяжении ($\sigma_{sc} > \sigma_{sp}$). Следовательно, поперечным сечениям балок из хрупких материалов целесообразно придавать асимметричную форму относительно нейтральной оси (рис. 2.79) и располагать балку так, чтобы большая часть материала находилась в растянутой зоне.

Таким образом, при расчетах балок из хрупкого материала используют два условия прочности: для растянутой зоны

$$\max \sigma_p = \frac{M_z y_1}{J_z} \leq [\sigma_p]; \quad (2.81)$$

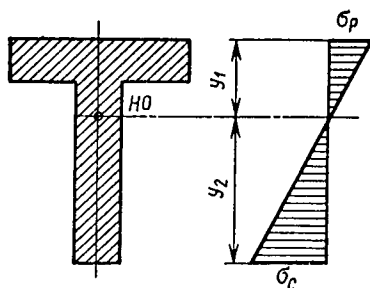


Рис. 2.79

для сжатой зоны

$$|\max \sigma_c| = \frac{M_z y_2}{J_z} \leq [\sigma_c]. \quad (2.82)$$

Причем наилучшее использование материала происходит при форме сечения, удовлетворяющей условию

$$y_1/y_2 = [\sigma_p]/[\sigma_c].$$

При расчете балок из пластичных материалов, например из низкоуглеродистой стали или цветных металлов, допускаемые напряжения растяжения и сжатия одинаковы: $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$. Поэтому для таких балок целесообразными являются сечения, симметричные относительно нейтральной оси (рис. 2.80), так как в этом случае наиболее удаленные точки в растянутой и сжатой зонах сечения располагаются на одинаковом расстоянии $y = h/2$ от нейтральной оси. И, следовательно,

$$\max \sigma_p = \max |\sigma_c| = \sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} \cdot \frac{h}{2}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части этого равенства на $\frac{h}{2}$:

$$\sigma_{\max} = M_z \cdot \frac{J_z}{h} \cdot \frac{1}{2}.$$

Величина

$$\frac{J_z}{h} = W_z,$$

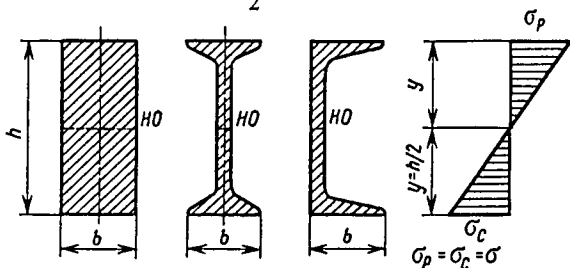


Рис. 2.80

выражаемая в м^3 , см^3 или мм^3 , называется *моментом сопротивления сечения при изгибе*.

Для прямоугольного сечения (рис. 2.80), размеры которого $b \times h$, момент сопротивления

$$W_z = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}. \quad (2.83)$$

Для круглого сечения

$$W_z = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (2.84)$$

Наиболее экономичны при изгибе такие формы сечения, при которых материал бруса расположен как можно дальше от нейтральной оси. У таких брусьев при наименьшей затрате материалов получается наибольший момент сопротивления W_z . Поэтому и возникли профили стандартного проката (рис. 2.80), все необходимые геометрические характеристики которых содержатся в ГОСТ 8239—72 «Сталь горячекатаная. Балки двутавровые», ГОСТ 8240—72 «Швеллеры».

Таким образом, наибольшие напряжения растяжения или сжатия в симметричном относительно нейтральной оси сечении находят по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (2.85)$$

и условие прочности балки из пластичного материала имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma], \quad (2.86)$$

исходя из которого выполняют три вида расчетов.

Проектный расчет. Приняв $\sigma_{\max} = [\sigma]$, по изгибающему моменту M_z в опасном сечении находят требуемое значение момента сопротивления:

$$W_z \geq \frac{M_z}{[\sigma]}. \quad (2.87)$$

Затем, исходя из принятой для балки формы поперечного сечения, находят его размеры.

Расчет допускаемой нагрузки выполняется при $\sigma_{\max} = [\sigma]$ по формуле

$$[M_z] = W_z [\sigma]. \quad (2.88)$$

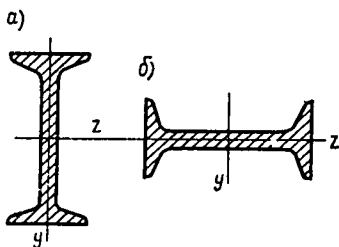


Рис. 2.81

Затем, исходя из схемы нагружения балки, находят допускаемое значение нагрузки.

Проверочный расчет. Определив максимальный изгибающий момент и момент сопротивления сечения, находят по формуле (2.85) значение σ и

сравнивают его с $[\sigma]$.

Аналогично выполняют расчеты балок из условия прочности (2.81) и (2.82).

Пример 2.19. Для балки, рассмотренной в примере 2.17, подобрать из условия прочности необходимые размеры двутавра при двух вариантах его расположения (рис. 2.81, а, б). Принять $[\sigma] = 150 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. Из эпюры M_z , построенной для балки на рис. 2.73, а, следует, что в опасном сечении $M_z = 11 \text{ кН} \cdot \text{м} = 11 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}$.

2. По расчетной формуле (2.87) находим необходимое значение момента сопротивления сечения:

$$W_z \geq \frac{M_z}{[\sigma]} = \frac{11 \cdot 10^6}{150} = 73,3 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 73,3 \text{ см}^3.$$

3. При расположении двутавра по варианту а из таблицы ГОСТ 8239—72* находим, что требуемому значению момента сопротивления соответствует двутавр № 14 с $W_z = 81,7 \text{ см}^3$. Площадь поперечного сечения этого двутавра $17,4 \text{ см}^2$, а масса 1 м длины 13,7 кг.

4. При расположении двутавра по варианту б из таблиц того же ГОСТа находим двутавр № 40 с моментом сопротивления $W_z = 86,1 \text{ см}^3$, площадью поперечного сечения $72,6 \text{ см}^2$ и массой 1 м длины 57 кг.

5. Как видим, при расположении по варианту а на четырехметровую балку расходуется стали на $(57 - 13,7) \cdot 4 = 173,2 \text{ кг}$ меньше, чем при расположении по варианту б.

Пример 2.20. Определить допускаемую нагрузку $[F]$ на балку (рис. 2.82, а), составленную из двух швеллеров № 6,5 при $[\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. Определяем реакции опор балки. Из уравнений моментов сил, действующих на балку, относительно точек А и В соответственно находим $R_A = 1,25F$ и $R_B = 1,75F$.

2. Построив эпюру M_z (рис. 2.82, б), видим, что опасное сечение расположено под силой $2F$, где возникает максимальный по абсолютному значению изгибающий момент. Следовательно, расчетный момент $[M_z] = 2,5Fa$.

3. По таблице ГОСТ 8240—72 момент сопротивления сечения одного швеллера № 6,5 $W_x = 15 \text{ см}^3$, а так как главная центральная ось z сечения балки совпадает с главными осями каждого из швеллеров, момент сопротивления сечения

$$W_z = 2W_x = 2 \cdot 15 = 30 \text{ см}^3 = 30 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

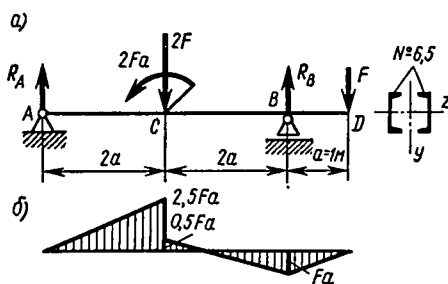


Рис. 2.82

4. Подставив в расчетную формулу (2.88) значение $[M_z] = 2,5 Fa$, получим $2,5 Fa = W_z [\sigma]$, откуда, полагая $a = 1 \text{ м} = 10^3 \text{ мм}$,

$$[F] = \frac{W_z [\sigma]}{2,5a} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 160}{2,5 \cdot 10^3} = 1920 \text{ Н} = 1,92 \text{ кН}.$$

Пример 2.21. Проверить прочность чугунной консоли AB (рис. 2.83, а) при указанном положении таврового сечения, если $[\sigma_p] = 30 \text{ Н/мм}^2$, $[\sigma_c] = 90 \text{ Н/мм}^2$. Для опасного поперечного сечения балки построить эпюры нормальных напряжений.

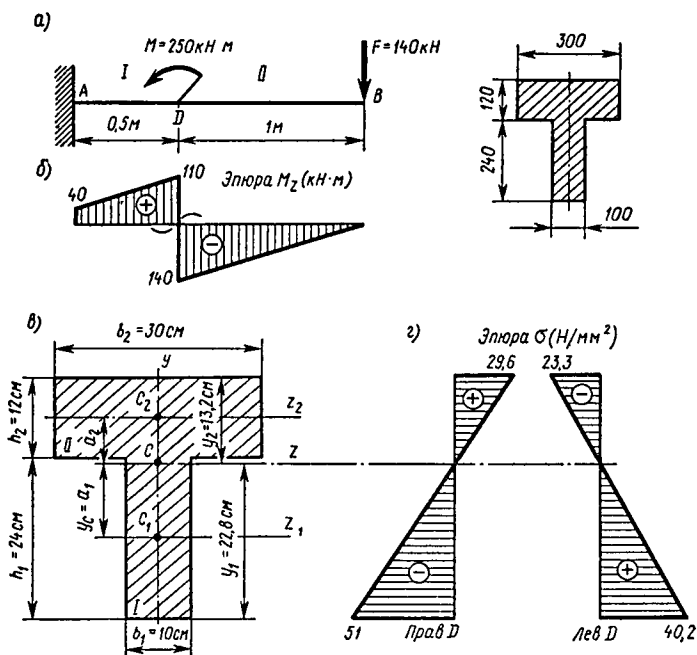


Рис. 2.83

Решение. 1. Построив эпюру M_z (рис. 2.83, б), видим, что опасное сечение балки проходит через точку D , где приложена пара сил с моментом M . Причем на участке II правее этого сечения (рис. 2.83, а) балка изогнута выпуклостью вверх, поскольку здесь $M_z < 0$, а левее на участке I балка изогнута выпуклостью вниз ($M_z > 0$).

2. Наибольший по абсолютному значению изгибающий момент $M_{zDII} = 140 \text{ кН} \cdot \text{м} = 140 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}$ возникает в сечении, принадлежащем участку, изогнутому выпуклостью вверх; следовательно, положение сечения балки выбрано правильно.

3. Изобразим в каком-либо произвольном масштабе (рис. 2.83, в) поперечное сечение балки, выразив его размеры в сантиметрах.

4. Определим положение центра тяжести сечения. Разбив сечение на два участка — прямоугольники I и II с центрами тяжести C_1 и C_2 , находим площади этих участков: $A_1 = 240 \text{ см}^2$, $A_2 = 360 \text{ см}^2$. Относительно оси $C_1 z_1$ ордината центра тяжести C_1 равна нулю, ордината центра тяжести C_2 $C_1 C_2 = 18 \text{ см}$. Ордината центра тяжести сечения

$$y_c = \frac{240 \cdot 0 + 360 \cdot 18}{240 + 360} = 10,8 \text{ см}.$$

5. Следовательно, главная центральная ось Cz расположена от оси $C_1 z_1$ на расстоянии $a_1 = y_c = 10,8 \text{ см}$, а от оси $C_2 z_2$ на расстоянии $a_2 = C_1 C_2 - C_1 C = 18 - 10,8 = 7,2 \text{ см}$. Соответственно расстояния от главной центральной оси (НО сечения) до наиболее удаленных точек в растянутой и сжатой зонах $y_2 = 13,2 \text{ см}$; $y_1 = 22,8 \text{ см}$ (рис. 2.83, в).

6. Определяем главный центральный момент инерции сечения как сумму моментов инерции участков I и II относительно оси Cz :

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2 = \\ &= \frac{10 \cdot 24^3}{12} + 10,8^2 \cdot 240 + \frac{30 \cdot 12^3}{12} + 7,2^2 \cdot 360 \approx 62\,500 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

или

$$J_z = 62\,500 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

7. По формуле (2.81), полагая $y_2 = 13,2 \text{ см} = 132 \text{ мм}$, определяем максимальные нормальные напряжения в растянутой зоне опасного сечения со стороны участка II :

$$\sigma_{pII} = \frac{M_{zDII}}{J_z} y_2 = \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 132}{62\,500 \cdot 10^4} = 29,6 \text{ Н/мм}^2.$$

Следовательно, $\sigma_{pII} = 29,6 \text{ Н/мм}^2 < [\sigma_p] = 30 \text{ Н/мм}^2$.

8. По формуле (2.82) определяем максимальные нормальные напряжения в сжатой зоне опасного сечения со стороны участка II :

$$|\sigma_{cII}| = \frac{M_{zDII}}{J_z} y_1 = \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 22,8}{62\,500 \cdot 10^4} = 51 \text{ Н/мм}^2.$$

Следовательно, $|\sigma_{cII}| = 51 \text{ Н/мм}^2 < [\sigma_c] = 90 \text{ Н/мм}^2$.

9. На участке *I* балки (в сечении *D*) в растянутой зоне расположена слабая часть балки. Поэтому это сечение также опасно и подлежит проверке.

По формуле (2.81) определяем максимальные напряжения в растянутой зоне, имея в виду, что здесь $M_{zDI} = 110 \text{ кН} \cdot \text{м} = 110 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}$:

$$\sigma_{pI} = \frac{M_{zDI}}{J_z} y_1 = \frac{110 \cdot 10^6 \cdot 22,8}{62\,500 \cdot 10^4} = 40,2 \text{ Н/мм}^2.$$

Следовательно, $\sigma_{pI} = 40,2 \text{ Н/мм}^2 > [\sigma_p] = 30 \text{ Н/мм}^2$.

Балка перегружена на 33% и ее запас прочности значительно снижен, что недопустимо.

10. По формуле (2.82) находим максимальные нормальные напряжения в сжатой зоне со стороны участка *I*:

$$\sigma_{cI} = \frac{M_{zDI}}{J_z} y_2 = \frac{110 \cdot 10^6 \cdot 13,2}{62\,500 \cdot 10^4} = 23,3 \text{ Н/мм}^2.$$

Это значение напряжения можно было и не находить, так как оно заведомо должно быть меньше $|\sigma_{cII}|$. Полученное значение нужно для построения эпюры σ в поперечном сечении балки.

11. По найденным значениям нормальных напряжений строим эпюры σ в поперечных сечениях балки правее и левее секущей плоскости, проведенной через точку *D* (рис. 2.83, з).

§ 2.26. Касательные напряжения при поперечном изгибе

При поперечном изгибе кроме нормальных напряжений в поперечном сечении бруса возникают касательные напряжения, а согласно закону парности (см. § 2.8), такие же напряжения появляются и в продольных сечениях бруса. Возникновение касательных напряжений в продольных сечениях можно проиллюстрировать таким примером. Если брус прямоугольного сечения высотой $2h$ нагрузить силой *F*, он изогнется, как показано на рис. 2.84, а. Если из такого же материала изготовить два бруса высотой *h* каждый, то при нагружении их силой *F* и отсутствии трения между ними они изогнутся каждый сам по себе (рис. 2.84, б). Отсюда видно, что при изгибе целого бруса высотой $2h$ между частями бруса,

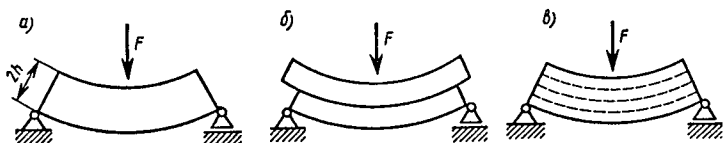


Рис. 2.84

разделенными продольными слоями, возникает взаимодействие, в результате которого и возникают касательные напряжения (рис. 2.84, в).

Числовые значения касательных напряжений в поперечных сечениях определяют, используя закон парности (§ 2.8), через напряжения, возникающие в продольных сечениях.

При поперечном изгибе изгибающий момент при переходе от одного сечения к другому вдоль оси бруса изменяется. Поэтому если в брусе выделить элемент длиной dz (рис. 2.85, а), то в его сечении, например справа, изгибающий момент отличается от изгибающего момента слева на dM_z . Соответственно максимальные нормальные напряжения в сечении справа на $d\sigma$ больше, чем слева (рис. 2.85, б). Продольным сечением, проведенным на расстоянии y от оси z (рис. 2.85, б, в), отделим от элемента его верхнюю часть и убедимся в том, что ее равновесие возможно лишь при наличии касательных напряжений в продольном сечении.

Равнодействующая элементарных нормальных сил σdA в сечении слева

$$N_{отс} = \int_A \sigma dA.$$

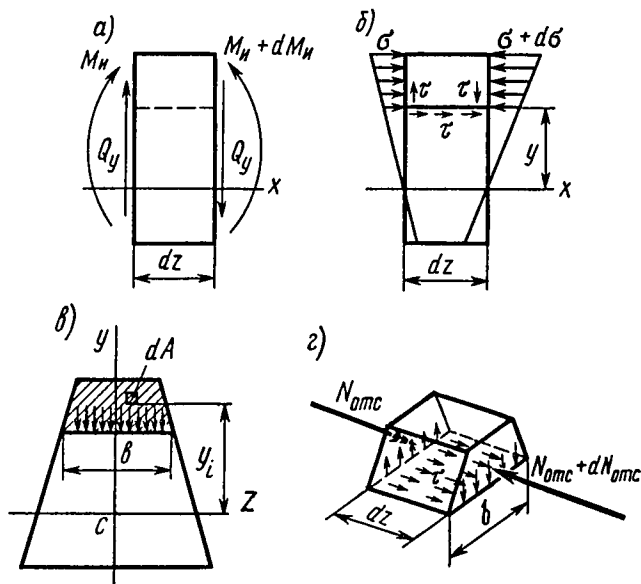


Рис. 2.85

Подставив сюда значение σ из формулы (2.80), получим

$$N_{\text{отс}} = \int_A \frac{M_z}{J_z} y_i dA = \frac{M_z}{J_z} \int_A y_i dA,$$

где $\int_A y_i dA = S_{z\text{отс}}$ — статический момент относительно оси z площади поперечного сечения отсеченной части. Следовательно,

$$N_{\text{отс}} = \frac{M_z S_{z\text{отс}}}{J_z}.$$

Аналогичным образом находим значение нормальной силы в правом сечении

$$N_{\text{отс}} + dN_{\text{отс}} = \frac{(M_z + dM_z) S_{z\text{отс}}}{J_z}.$$

Как видим, нормальные силы, возникающие справа и слева отсеченной части элемента, не уравниваются друг друга, а между тем рассматриваемая часть элемента бруса находится в равновесии. Следовательно, разность нормальных сил

$$dN_{\text{отс}} = \frac{dM_z S_{z\text{отс}}}{J_z}$$

должна уравниваться касательными силами, возникающими в продольном сечении отделенного элемента (рис. 2.85, z). Считая, что касательные напряжения по ширине b сечения распределены равномерно, получим

$$\frac{dM_z S_{z\text{отс}}}{J_z} = \tau b dz \quad \text{или} \quad \frac{dM_z S_{z\text{отс}}}{dz J_z} = \tau b.$$

Откуда, помня, что $\frac{dM_z}{dz} = Q_y$ [см. формулу (2.74)], получим формулу Журавского*

$$\tau = \frac{Q_y S_{z\text{отс}}}{J_z b}. \quad (2.89)$$

* Д. И. Журавский (1821—1891) — русский инженер-мостостроитель, создавший широко применимую приближенную теорию распределения касательных напряжений в балках при изгибе.

Определяя по этой формуле значение касательных напряжений в продольных сечениях бруса, находим равные им по закону парности касательные напряжения и в поперечном сечении.

Применим формулу Журавского к прямоугольному поперечному сечению бруса (рис. 2.86, а), в котором возникла поперечная сила Q_y . Момент инерции прямоугольного сечения $J_z = bh^3/12$, ширина сечения $b = \text{const}$ по всей высоте. Следовательно, касательные напряжения τ в точках сечения, расположенных на расстоянии y от центральной оси, зависят от изменения статического момента $S_{z_{отс}}$ заштрихованной части сечения выше уровня y .

Статический момент заштрихованной части сечения

$$S_{z_{отс}} = A_{отс} \cdot y_1,$$

где заштрихованная площадь

$$A_{отс} = b \left(\frac{h}{2} - y \right),$$

а ордината центра тяжести этой площади

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right).$$

Следовательно,

$$S_{z_{отс}} = A_{отс} y_1 = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Подставляя найденные значения J_z , $S_{z_{отс}}$ в формулу (2.89), получим

$$\tau = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Как видим, эпюра касательных напряжений по высоте сечения (рис. 2.86, б) изображается квадратичной параболой. Максимальное напряжение возникает в точках сечения, расположенных на центральной оси (при $y=0$):

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}.$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в 1,5 раза превышает среднее значение на-

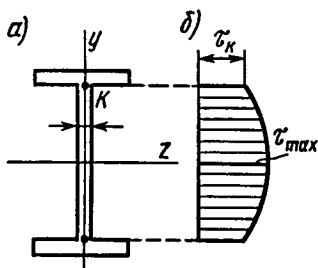


Рис. 2.86

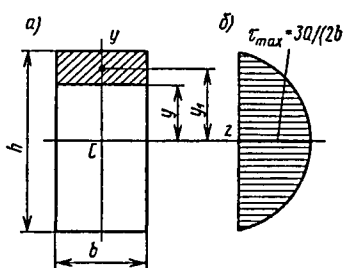


Рис. 2.87

пряжения

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q_y}{A} = \frac{Q_y}{bh}$$

у верхней и нижней кромки сечения (при $y = h/2$) $\tau = 0$.

В балке прямоугольного, а также круглого сечений максимальные касательные напряжения возникают в тех точках, где нормальные напряжения равны нулю, и, наоборот, в крайних точках сечения, где нормальные напряжения максимальны, касательные напряжения равны нулю. Поэтому за опасные можно принять точки, наиболее удаленные от нейтральной оси, что подтверждается практикой эксплуатации балок, работающих на изгиб. Однако в случае тонкостенных профилей (например, двутавра) необходимо проверить прочность балки и в точках, где полка сочленяется со стенкой, поскольку здесь возникают значительные как нормальные, так и касательные напряжения.

Если поперечное сечение двутавровой балки упрощенно представить составленной из трех прямоугольников (рис. 2.87, а), то эпюру касательных напряжений в стенке балки (рис. 2.87, б) получим следующим образом.

Напряжения в верхней (и нижней) точке стенки находим, подставив в формулу (2.89) статический момент полки S_{zn} относительно оси z и приняв ширину сечения b равной толщине стенки двутавра d (см. рис. 2.61):

$$\tau_K = \frac{Q_y S_{\text{zn}}}{J_z d}.$$

Максимальные касательные напряжения, возника-

ющие в точках на нейтральной оси z , находим из формулы

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_z}{J_z d},$$

где S_z — статический момент полусечения относительно оси z . В таблице ГОСТ 8239—72* на профили двутавровых балок эта величина обозначена S_x .

В коротких двутавровых балках большой высоты касательные напряжения могут достигать больших значений в случаях значительных нагрузок, приложенных вблизи опор. В таких случаях кроме основного расчета на прочность по нормальным напряжениям следует определять максимальные касательные напряжения в том сечении, где возникла наибольшая поперечная сила, и сравнить их с допускаемыми. Обычно для стальных балок принимают $[\tau] = 0,6 [\sigma]$.

§ 2.27. Понятие о линейных и угловых перемещениях при изгибе

При изгибе, как установлено в предыдущих параграфах, под действием поперечных нагрузок продольная ось бруса (балки) искривляется. Если изгиб протекает в пределах упругих свойств материала, т. е. в пределах закона Гука, то после снятия нагрузок ось бруса снова выпрямляется. Поэтому изогнутую ось бруса называют *упругой линией*. По форме, которую при нагружении бруса принимает его упругая линия, можно судить об угловых и линейных перемещениях при изгибе.

Изобразим продольную ось зашеченной одним концом балки (рис. 2.88). Под действием нагрузки F , перпендикулярной оси балки и расположенной в

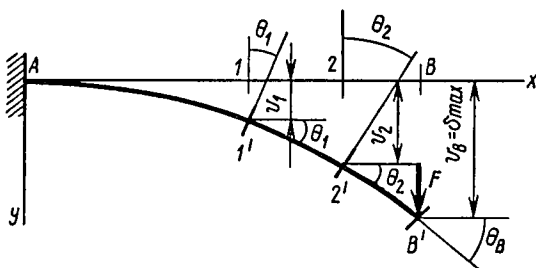


Рис. 2.88

главной плоскости, ось, оставаясь в этой плоскости, изгибается и принимает вид отрезка кривой. Рассматривая изогнутую ось балки (рис. 2.88), исходя из принятого допущения о незначительности перемещений точек тела при упругих деформациях (см. § 2.3), видим следующее.

Центры тяжести произвольных сечений 1 и 2 при изгибе балки переместились соответственно на расстояния v_1^* и v_2 , а сами сечения, оставаясь плоскими (по гипотезе плоских сечений), повернулись на углы θ_1 и θ_2 . Так как при повороте сечения остаются перпендикулярными к изогнутой оси бруса, то угол поворота θ произвольного поперечного сечения бруса равен углу между касательной к изогнутой оси в данной точке и направлением оси недеформированного бруса.

Линейные перемещения центров тяжести произвольных поперечных сечений при изгибе называются прогибами бруса в соответствующих точках, а наибольший прогиб обозначается δ_{\max} и называется *стрелой прогиба*. На рис. 2.88 стрела прогиба образовалась в точке В.

Существует несколько способов определения перемещений сечений при изгибе. Один из них основан на дифференцировании уравнения упругой линии. Для вывода этого уравнения используется формула (2.79), выражающая зависимость между кривизной $1/\rho$ и изгибающим моментом M_z . При этом следует иметь в виду, что правило знаков для кривизны изогнутой оси связано с выбранными направлениями осей координат. Если принять, что ось x направлена вправо, а ось y — вниз, как показано на рис. 2.88, то кривизна оси балки положительна в том случае, когда при изгибе балка обращена вогнутостью вниз, и отрицательна, когда балка обращена вогнутостью вверх, т. е. положительному изгибающему моменту соответствует отрицательная кривизна, а отрицательному — положительная кривизна. В соответствии с этим перепишем формулу (2.79) в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M_z}{EJ_z}.$$

* Перемещения по осям x , y и z принято обозначать соответственно u , v и w .

С другой стороны, из курса математики известно, что в системе координат (x, y) кривизна упругой линии при малых перемещениях сечений может быть выражена равенством

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Сопоставив друг с другом два последних равенства, получаем *дифференциальное уравнение упругой линии балки*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EJ_z}. \quad (2.90)$$

Интегрируя уравнение (2.90) для каждого конкретного случая нагружения балки, можно определить сначала угол поворота заданного сечения:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z dx}{EJ_z} + C,$$

а затем его прогиб:

$$v = \iint \frac{M_z dx}{EJ_z} + Cx + D.$$

Если балка имеет несколько участков нагружения, то уравнение (2.90) составляют для каждого участка в отдельности. После двойного интегрирования каждого из этих уравнений образуется по две произвольных постоянных, которые необходимо определить. Решение получается очень громоздким. Поэтому чаще всего для определения перемещений сечений балок используют более рациональный способ с помощью интеграла Мора.

§ 2.28. Интеграл Мора

Допустим, что для бруса, нагруженного силой F (рис. 2.89), требуется определить перемещение точки K в направлении y .

Проведем из точки K касательную к участку бруса слева в точке O и выделим у этой точки элемент длиной dx . При нагружении бруса внешней силой F кривизна элемента dx изменится на $\Delta(1/\rho)$ и правое его сечение повернется относительно левого на угол

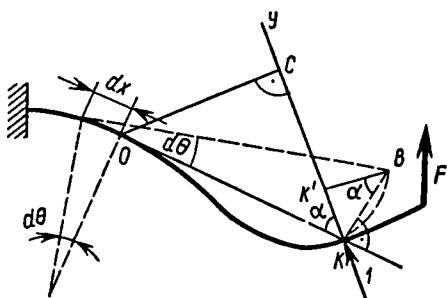


Рис. 2.89

$d\theta$, значение которого, согласно формулам (2.76) и (2.79), запишем так:

$$d\theta = \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) dx = \frac{M_{zF} dx}{EJ_z}.$$

Из-за этого поворота правая часть бруса повернется как жесткое целое на тот же угол $d\theta$, а точка K по направлению y переместится на

$$dv_K = KK'.$$

Из $\triangle KBK'$ $KK' = KB \sin \alpha$, а из $\triangle OKB$, пренебрегая длиной элемента dx и считая $\tan(d\theta) = d\theta$, $KB = OK d\theta$. Таким образом,

$$dv_K = OK \sin \alpha \cdot d\theta.$$

Из $\triangle OKC$ видим, что $OK \sin \alpha = OC$; следовательно,

$$dv_K = OC d\theta.$$

Если в точке K по направлению y приложить к брусу единичную (безразмерную) силу 1 , то момент единичной силы $M_{z1} = 1 \cdot OC$ и тогда $dv_K = M_{z1} d\theta$.

Подставив сюда полученное выше значение угла $d\theta$, получим

$$dv_K = \frac{M_{zF} M_{z1}}{EJ_z} dx.$$

Интегрируя эти выражения отдельно для каждого участка l_i нагружения бруса и суммируя результаты, получим формулу интеграла Мора

$$v_K = \sum \int_{l_i} \frac{M_{zF} M_{z1}}{EJ_z} dx. \quad (2.91)$$

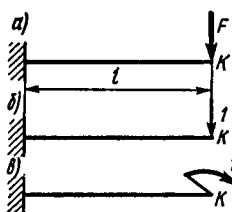


Рис. 2.90

В случае если жесткость сечения бруса по всей длине постоянна, формула (2.91) имеет вид

$$v_K = \frac{1}{EJ_x} \sum \int_{l_i} M_{zF} M_{z1} dx, \quad (2.92)$$

где M_{zF} — уравнение изгибающего момента от нагрузки F ; M_{z1} — уравнение изгибающего момента от единичной силы.

Для определения угла поворота сечения в точке K формула интеграла Мора аналогична формуле (2.92):

$$\theta_K = \frac{1}{EJ_z} \sum \int_{l_i} M_{zF} M_{z1} dx. \quad (2.93)$$

Только в этом случае M_{z1} — уравнение изгибающего момента от единичного момента.

Пример 2.22. Определить прогиб v_K консоли (рис. 2.90, а) и угол поворота сечения в точке K .

Решение. 1. Изгибающий момент от силы F по всей длине консоли, т. е. при $0 \leq z \leq l$, имеет вид

$$M_{zF} = -Fz.$$

2. Сняв нагрузку F , приложим в точке K (в месте определения прогиба) единичную силу 1 (рис. 2.90, б). Уравнение изгибающего момента от единичной силы $M_{z1} = -1 \cdot z$ при $0 \leq z \leq l$.

3. По формуле (2.92)

$$v_K = \delta_{\max} = \frac{1}{EJ_z} \int_l M_{zF} M_{z1} dz = \frac{1}{EJ_z} \int_l Fz^2 dz = \frac{F}{EJ_z} \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^l.$$

Подставляя значения $z=0$ и $z=l$, получим

$$v_K = \delta_{\max} = \frac{Fl^3}{3EJ_z}.$$

4. Для определения угла поворота, сняв нагрузку F , приложим в точке K к балке единичный момент (рис. 2.90, в). Значение изгибающего момента по всей длине балки

$$M_{z1} = -1 = \text{const.}$$

5. По формуле (2.93) получим

$$\theta_K = \frac{1}{EJ_z} \int_l M_{zF} M_{z1} dz = \frac{1}{EJ_z} \int_l Fz dz = \frac{F}{EJ_z} \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^l$$

или

$$\theta_K = \frac{Fl^2}{2EJ_z}.$$

§ 2.29. Правило Верещагина

Вычисление интеграла Мора целесообразно вести по правилу, предложенному А. Н. Верещагиным в 1925 г. для прямолинейных брусьев.

Уравнения изгибающих моментов M_{zF} и M_{z1} , входящие в формулу интеграла Мора,—это некоторые функции от x : $M_{zF} = y = f_1(x)$, $M_{z1} = y = f_2(x)$, а графики этих функций—эпюры M_{zF} и M_{z1} (рис. 2.91) на некотором участке балки. Причем если первая функция $y = f_1(x)$ может быть и нелинейной, то вторая $y = f_2(x)$, выражающая изгибающий момент от единичной силы (или единичного момента), обязательно линейная. Поэтому ее можно представить уравнением прямой с угловым коэффициентом, т. е.

$$y = f_2(x) = b + kx.$$

Следовательно, вычисление интеграла $\int_0^l M_{zF} M_{z1} dx$ можно заменить вычислением интеграла

$$\int_0^l f_1(x) f_2(x) dx = \int_0^l f_1(x) (b + kx) dx.$$

Раскрыв скобки под интегралом в правой части равенства, получим

$$\begin{aligned} \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx &= \\ &= b \int_0^l f_1(x) dx + k \int_0^l x f_1(x) dx. \quad (a) \end{aligned}$$

Произведение $f_1(x) dx$ есть не что иное, как заштрихованная на рис. 2.91 элементарная площадка эпюры M_{zF} . Значит, первый интеграл в правой части равенства (а) выражает площадь эпюры M_{zF} в интервале

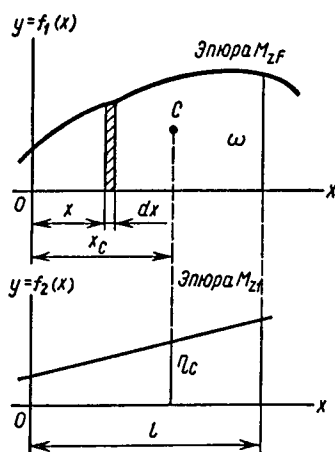


Рис. 2.91

от $x=0$ до $x=l$, а второй интеграл — статический момент этой же площади относительно оси y , который, как известно из § 2.19 [формула (2.59)], выражается произведением площади на координату x_c ее центра тяжести C . Если площадь эпюры M_{zF} обозначить буквой ω , то равенство (а) примет вид

$$\int_0^l f_1(x)f_2(x)dx = b\omega + k\omega x_c = \omega(b + kx_c),$$

где $b + kx_c = \eta_c$, т. е. ордината эпюры M_{z1} под центром тяжести C эпюры M_{zF} . Следовательно, в окончательном виде

$$\int_0^l M_{zF}M_{z1}dx = \int_0^l f_1(x)f_2(x)dx = \omega\eta_c.$$

Теперь формула интеграла Мора (2.92) может быть записана так:

$$v_K = \frac{1}{EJ_z} \sum \omega \eta_c. \quad (2.94)$$

Таким образом, **правило Верещагина** состоит в том, что интеграл Мора, составленный для каждого из участков нагружения балки, равен произведению площади ω нелинейной эпюры изгибающих моментов M_{zF} на ординату η_c эпюры изгибающего момента M_{z1} , соответствующую положению центра тяжести площади ω .

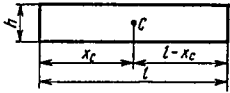
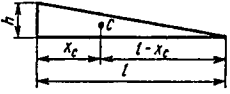
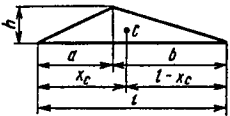
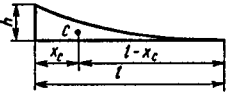
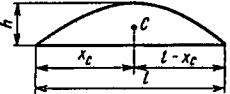

Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина обычно называют *методом перемножения эпюр*. Эпюра M_{zF} называется грузовой эпюрой, а эпюра M_{z1} — единичной.

При перемножении эпюр необходимо иметь в виду следующее: произведение $\omega\eta_c > 0$, если площадь ω и ордината η_c расположены по одну сторону от базовых линий; при расположении ω и η_c по разные стороны от базовых линий $\omega\eta_c < 0$;

если в пределах данного участка грузовая эпюра линейна, то безразлично, умножается ли площадь грузовой эпюры на ординату единичной или, наоборот, площадь единичной эпюры на ординату грузовой; построенные эпюры M_{zF} и M_{z1} не штрихуют.

В табл. 2.1 приведены формулы для определения площадей некоторых эпюр и положений их центров тяжести.

Таблица 2.1

Вид эпюры	ω	Положение центра тяжести	
		x_c	$l - x_c$
	hl	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$	$\frac{2}{3}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}(a+l)$	$\frac{1}{3}(b+l)$
	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$	$\frac{3}{4}l$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{3}{8}l$

Все сказанное выше сохраняет силу и при определении углов поворота сечений θ_K , с той лишь разницей, что вместо эпюры единичной силы строится эпюра единичного момента.

Пример 2.23. Для балки, нагруженной равномерно распределенной силой интенсивностью q , определить прогиб посередине пролета l и поворот сечения под правой опорой B (рис. 2.92, а).

Решение. 1. Ввиду симметричности расположения нагрузки реакции опор

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

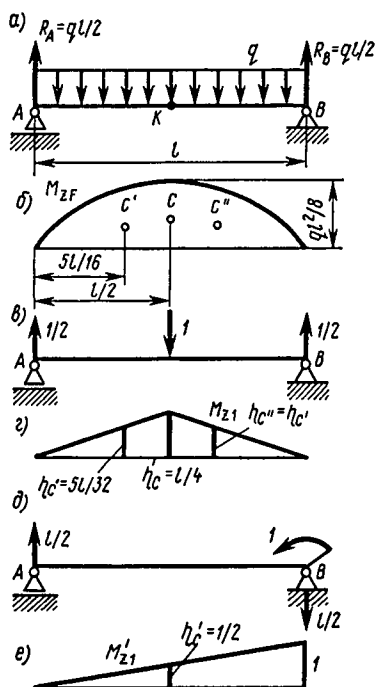


Рис. 2.92

вой части эпюры M_{z1} :

$$\eta_{C'} = \frac{5l}{32}.$$

6. По формуле (2.94) искомый прогиб посередине пролета балки

$$v_K = \delta_{\max} = \frac{1}{EJ_z} 2\omega' \eta_{C'} = \frac{1}{EJ_z} 2 \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{5}{32} l,$$

откуда

$$v_K = \delta_{\max} = \frac{5ql^4}{384EJ_z}.$$

7. Для определения угла поворота сечения над правой опорой приложим в этом месте к балке, освободив ее от нагрузки, единичный момент (рис. 2.92, д) и построим эпюру M'_{z1} , которая линейна по всей длине l .

8. Площадь параболического сегмента с центром тяжести C

$$\omega = \frac{2}{3} hl = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l = \frac{ql^3}{12}.$$

Ордината эпюры M'_{z1} под центром тяжести C (рис. 2.92, е) $\eta'_{C'} = l/2$.

2. Строим эпюру M_{zf} . Она имеет вид параболического сегмента (рис. 2.92, б) с хордой l и высотой $h = \frac{ql^2}{8}$.

3. Освободив балку от нагрузки, приложим к точке K (посередине пролета) единичную силу (рис. 2.92, в) и построим эпюру M_{z1} (рис. 2.92, г).

4. Так как эпюра M_{z1} в данном случае состоит из двух линейных участков, соответственно разделим грузовую эпюру на два параболических треугольника с центрами тяжести C' и C'' . Площади этих фигур равны между собой, т. е.

$$\omega' = \omega'' = \frac{2}{3} h \frac{l}{2} = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^3}{24}.$$

5. Из пропорции

$$\frac{\eta_{C'}}{\eta_C} = \frac{5l}{16} : \frac{l}{2}$$

находим соответствующую положению C' ординату ле-

Следовательно,

$$\theta_B = \frac{1}{EJ_z} \omega \eta'_c = \frac{1}{EJ_z} \frac{ql^3}{12} \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EJ_z}.$$

Пример 2.24. Определить прогиб в середине пролета балки, нагруженной, как показано на рис. 2.93, а. Принять $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. Определяем реакции опор:

$$R_A = 18 \text{ кН и } R_B = 2 \text{ кН.}$$

2. При произвольном нагружении балки изломы грузовой эпюры, как правило, не совпадают с изломом единичной эпюры. В подобных случаях целесообразно применять *метод расслоения грузовой эпюры*, т. е. строить эпюры от каждой силы отдельно, подходя к сечению K слева или справа в зависимости от места приложения внешней нагрузки (рис. 2.93, б).

Эпюра изгибающих моментов от силы R_A имеет вид треугольника с центром тяжести C_1 . Изгибающий момент на участке AK изменяется от 0 (в сечении над опорой A) до $18 \cdot 2,5 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (в сечении K). Изгибающий момент от силы F изменяется от 0 (в сечении под силой F) до $-20 \cdot 1,5 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Центр тяжести этой эпюры C_2 . Изгибающий момент от момента $M = 10 \cdot \text{кН} \cdot \text{м}$ изображается прямоугольником с центром тяжести C_3 . Изгибающий момент от силы R_B имеет вид треугольника с центром тяжести C_4 (для удобства эта эпюра изображена выше эпюры от момента M).

3. Освободив балку от нагрузки, приложим в сечении K единичную силу (рис. 2.93, в) и построим единичную эпюру (рис. 2.93, г).

4. Значения ординат η_i единичной эпюры под соответствующими центрами тяжести грузовой эпюры находим из пропорций

$$\frac{\eta_i}{x_i} = \frac{1,25}{2,5} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\eta_1 = \eta_4 = \frac{1,67}{2} = 0,835 \text{ м; } \eta_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ м; } \eta_3 = \frac{2,25}{2} = 1,125 \text{ м.}$$

5. Имея в виду, что для сечения двутавра № 24а (ГОСТ 8239—72) $J_z = 3800 \text{ см}^4 = 3800 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$, значения изгибающих моментов на грузовой эпюре выражены в $\text{кН} \cdot \text{м}$, а размеры по длине балки в м, по формуле (2.94) находим прогиб балки в сечении K :

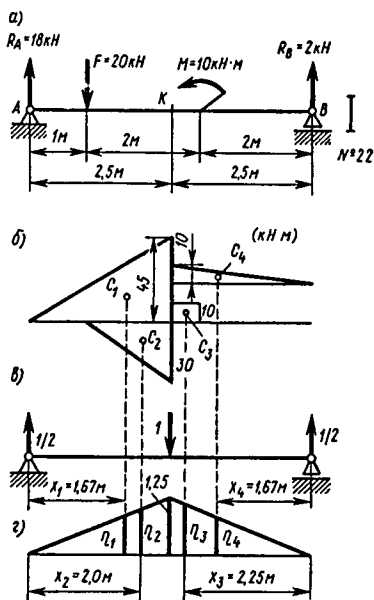


Рис. 2.93

$$v_k = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} \left(\frac{2,5 \cdot 45}{2} \cdot 0,835 - \frac{1,5 \cdot 30}{2} \cdot 1 + \right. \\ \left. + 0,5 \cdot 10 \cdot 1,125 + \frac{2,5 \cdot 10}{2} \cdot 0,835 \right) 10^{12} = \frac{405}{2 \cdot 38} \approx 5,3 \text{ мм.}$$

§ 2.30. Расчеты на жесткость

Многие элементы строительных и машиностроительных конструкций (балки, оси, валы и пр.) кроме расчетов на прочность требуют расчета и на жесткость. Условие жесткости обычно выражается неравенством

$$\delta \leq [\delta], \quad (2.95)$$

суть которого в том, что максимальный прогиб (стрела прогиба) не должен превышать допускаемого значения $[\delta]$.

Допускаемый прогиб $[\delta]$ зависит от назначения и условий работы рассчитываемого элемента конструкции и колеблется в широких пределах. Например, для балок, валов или осей $[\delta]$ выражают в долях пролета l (расстояния между опорами), т. е. принимают $[\delta] = l/k$, где k — положительное число. Например, для валов и шпинделей металлорежущих станков $[\delta] = (0,005 \dots 0,001)l$, а для балок и перекрытий гражданских и промышленных зданий колеблется от $l/150$ до $0,001l$. В частности, жесткость балки в примере 2.24 соответствует этому значению; ее прогиб $\delta = v_k \approx 0,001l$.

Для облегчения расчетов на жесткость в табл. 2.2 приведены формулы прогибов и углов поворота сечений балок в простейших случаях их нагружения.

Пример 2.25. Проверить жесткость двутавровой консольной балки (рис. 2.94) при $[\delta] = 0,004l$, а также определить угол поворота сечения под силой F_1 . Принять $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. При решении задачи используем принцип независимости действия сил (см. § 2.3).

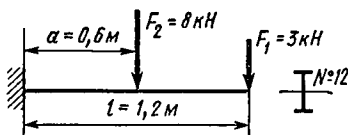
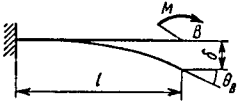
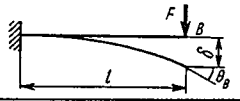
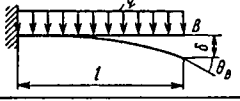
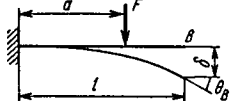
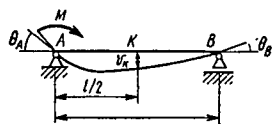
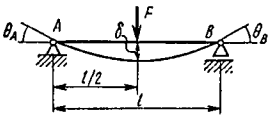
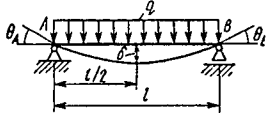
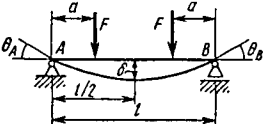
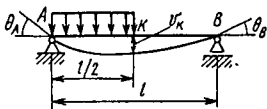
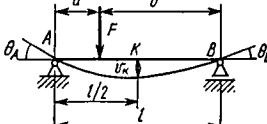


Рис. 2.94

Таблица 2.2

Схема нагружения балки	Максимальный прогиб δ или прогиб v_K в сечении K	Угол поворота θ указанного на схеме сечения
1	2	3
	$\delta = \frac{Ml^2}{2EJ_z}$	$\theta_B = \frac{Ml}{EJ_z}$
	$\delta = \frac{Fl^3}{3EJ_z}$	$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EJ_z}$
	$\delta = \frac{ql^4}{8EJ_z}$	$\theta_B = \frac{ql^3}{6EJ_z}$
	$\delta = \frac{Fa^2}{6EJ_z}(3l-a)$	$\theta_B = \frac{Fa^2}{2EJ_z}$
	$v_K = \frac{Ml^2}{16EJ_z}$	$\theta_A = \frac{Ml}{3EJ_z},$ $\theta_B = \frac{Ml}{6EJ_z}$
	$\delta = \frac{Fl^3}{48EJ_z}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{Fl^2}{16EJ_z}$
	$\delta = \frac{5ql^4}{384EJ_z}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{ql^3}{24EJ_z}$
	$\delta = \frac{Fa}{24EJ_z}(3l^2 - 4a^2)$	$\theta_A = \theta_B = \frac{Fa}{2EJ_z}(l-a)$

1	2	3
	$v_K = \frac{5ql^4}{768EJ_z}$	$\theta_A = \frac{3ql^3}{128EJ_z},$ $\theta_B = \frac{7ql^3}{384EJ_z}$
	$v_K = \frac{Fa}{48EJ_z} (3l^2 - 4a^2)$ $\left(a < \frac{l}{2} \right)$	$\theta_A = \frac{Fab}{6EJ_z} \cdot \frac{l+b}{l},$ $\theta_B = \frac{Fab}{6EJ_z} \cdot \frac{l+a}{l}$

Примечание. В таблице указаны абсолютные значения прогибов углов поворота.

2. Принимая во внимание, что $F_1 = 3 \text{ кН} = 3 \cdot 10^3 \text{ Н}$; $l = 1,2 \text{ м} = 1200 \text{ мм}$; $J_z = 350 \text{ см}^4 = 35 \cdot 10^5 \text{ мм}^4$ (см. в приложении 3 значение J_x для профиля № 12), находим прогиб δ_1 , вызванный силой F_1 , по формуле из табл. 2.2 для второй по порядку схемы нагружения:

$$\delta_1 = \frac{F_1 l^3}{3EJ_z} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1200^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^5} = \frac{6 \cdot 144}{350} \approx 2,5 \text{ мм.}$$

3. Аналогичным образом по четвертой формуле табл. 2.2 находим прогиб δ_2 , вызванный силой F_2 . Здесь $F_2 = 8 \text{ кН} = 8 \cdot 10^3 \text{ Н}$; $a = 0,6 \text{ м} = 600 \text{ мм}$.

$$\delta_2 = \frac{F_2 a^2}{6EJ_z} (3l - a) = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 600^2}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^5} (3 \cdot 1200 - 600) = \frac{4 \cdot 18}{35} \approx 2,1 \text{ мм.}$$

4. Максимальный прогиб балки:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2,5 + 2,1 = 4,6 \text{ мм.}$$

5. Допускаемый прогиб

$$[\delta] = 0,004l = 0,004 \cdot 1200 = 4,8 \text{ мм.}$$

Следовательно, максимальный прогиб консоли не превышает допускаемого значения. Условие жесткости выполняется.

6. Угол поворота сечения под силой F_1 , вызванный силой F_1 , находим по формуле, взятой из той же табл. 2.2:

$$\theta_1 = \frac{F_1 l^2}{2EJ_z} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1200^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^5} = \frac{9 \cdot 12}{35 \cdot 10^3} = 0,00345 \text{ рад.}$$

7. Аналогичным образом находим угол поворота того же сечения, вызванный силой F_2 :

$$\theta_2 = \frac{F_2 a^2}{2EJ_z} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 600^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^5} = \frac{2 \cdot 36}{35 \cdot 10^3} = 0,00206 \text{ рад.}$$

8. Суммарный угол поворота сечения

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 0,00551 \text{ рад,}$$

что соответствует $\approx \frac{1^\circ}{3}$ (около $19'$).

Вопросы для самопроверки

1. Возникновением каких внутренних факторов характеризуется прямой чистый изгиб и прямой поперечный изгиб?

2. Приведите примеры нагружения бруса сосредоточенными силами, при которых на участке (участках) бруса в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент?

3. Как определить напряжение в любой точке данного поперечного сечения при прямом изгибе?

4. Во сколько раз уменьшится прочность балки прямоугольного сечения с основанием b и высотой h , если балку положить плашмя (т. е. чтобы высота стала основанием, а основание высотой)?

5. Каковы особенности расчета балок из хрупких материалов?

6. Почему при изгибе в продольных сечениях балок возникают касательные напряжения?

7. Во сколько раз увеличится прогиб: а) двухопорной, б) консольной балки, если равномерно распределенную нагрузку по всей длине балки заменить сосредоточенной, в первом случае приложенной посередине между опорами, а во втором — на конце консоли? (Ответ, а) в 4 раза; б) в 1,6 раза.)

ГЛАВА 7. КОСОЙ ИЗГИБ. ИЗГИБ БРУСА С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

§ 2.31. Косой изгиб

Если в поперечном сечении возникают два внутренних силовых фактора — изгибающие моменты M_z и M_y , то происходит *косой чистый изгиб*. При *поперечном косом изгибе* в поперечных сечениях бруса одновременно с изгибающими моментами возникают поперечные силы Q_y и Q_z . В том и другом случае нормальное напряжение σ в любой точке K поперечного сечения (рис. 2.95, а), согласно принципу независимости действия сил, определяется как алгебраическая сумма напряжений, обусловленных изгибающими моментами M_y и M_z , т. е.

$$\sigma = \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} = \frac{M_y}{J_y} y + \frac{M_z}{J_z} z. \quad (2.96)$$

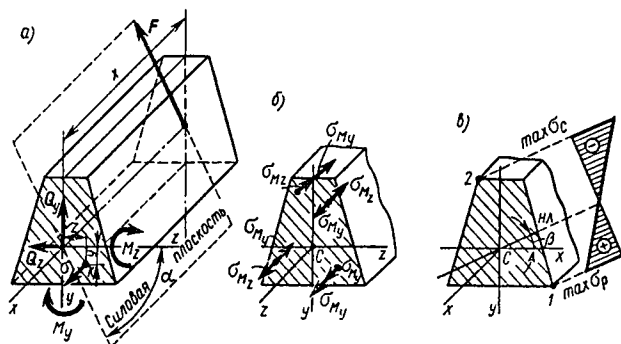


Рис. 2.95

В зависимости от нагружения бруса слагаемые напряжения направлены в разных четвертях поперечного сечения либо в одну и ту же, либо в противоположные стороны (рис. 2.95, б). Чтобы определить точки сечения, в которых напряжения достигают наибольших значений, необходимо найти положение нулевой линии. Для этого приравняем уравнение (2.96) нулю и заменим y и z координатами y_0 и z_0 , принадлежащими нулевой линии. В результате получаем *уравнение нулевой линии*

$$\frac{M_y}{J_y} z_0 + \frac{M_z}{J_z} y_0 = 0.$$

Отсюда

$$y_0 = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y} z_0.$$

Это уравнение показывает, что нулевая линия — прямая, проходящая через начало координат под углом β к оси z , тангенс которого

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}.$$

Определив угол β и прочертив нулевую линию в поперечном сечении (рис. 2.95, в), можно легко определить координаты наиболее удаленных точек 1 и 2 и затем по формуле (2.96) вычислить значения напряжений в этих точках.

Для бруса из материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, должны быть состав-

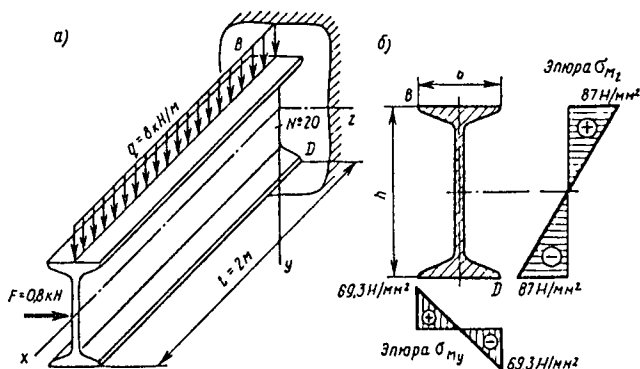


Рис. 2.96

лены два условия прочности:

$$\max \sigma_p = \frac{M_z}{J_z} y_1 + \frac{M_y}{J_y} z_1 \leq [\sigma_p],$$

$$\max |\sigma_c| = \frac{M_z}{J_z} y_2 + \frac{M_y}{J_y} z_2 \leq [\sigma_c].$$

Для брусков из пластичных материалов используют лишь то из условий, которое соответствует большему по абсолютному значению напряжения.

Пример 2.26. Проверить прочность двутавровой консоли, нагруженной, как показано на рис. 2.96, а. Принять $[\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. Рассмотрим действие каждой нагрузки на консоль отдельно. Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 8 \text{ кН/м} = 8000 \text{ Н/м}$ создаст наибольший изгибающий момент в сечении заделки:

$$M_z = -\frac{ql^2}{2} = -\frac{8000 \cdot 2^2}{2} = -16000 \text{ Н} \cdot \text{м} = -16 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

В том же сечении возникает наибольший изгибающий момент от силы $F = 0,8 \text{ кН} = 800 \text{ Н}$:

$$M_y = -Fl = -800 \cdot 2 = -1600 \text{ Н} \cdot \text{м} = -1,6 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

2. По таблице ГОСТ 8239—72* находим для двутавра № 20 значения моментов сопротивления:

$$W_z = 184 \text{ см}^3 = 184 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 \text{ и } W_y = 23,1 \text{ см}^3 = 23,1 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$$

3. Обусловленные изгибающим моментом M_z наибольшие по модулю нормальные напряжения σ_{Mz} возникают в точках сечения, удаленных от оси z на расстояние $h/2$. Поэтому

$$\sigma_{Mz} = \left| \frac{M_z}{W_z} \right| = \frac{16 \cdot 10^6}{184 \cdot 10^3} = 87 \text{ Н/мм}^2.$$

Эпюра σ_{Mz} изображена на рис. 2.96, б правее сечения двутавра в заделке.

4. Наибольшие по модулю нормальные напряжения σ_{My} возникают в точках сечения двутавра, удаленных от оси y на расстояние $b/2$:

$$\sigma_{My} = \left| \frac{M_y}{W_y} \right| = \frac{1,6 \cdot 10^6}{23,1 \cdot 10^3} = 69,3 \text{ Н/мм}^2.$$

Эпюра σ_{My} построена на рис. 2.96, б под сечением двутавра.

5. Из совместного рассмотрения эпюр σ_{Mz} и σ_{My} видно, что опасными точками сечения являются точки B и D , где

$$\max |\sigma| = \sigma_{Mz} + \sigma_{My} = 87 + 69,3 = 156,3 \text{ Н/мм}^2.$$

6. Так как $\sigma = 156,3 \text{ Н/мм}^2 < [\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2$, прочность консоли обеспечена.

§ 2.32. Расчеты бруса большой жесткости при изгибе с растяжением (сжатием)

Если нагрузить брус в главной плоскости силой F (рис. 2.97, а) под углом α к оси, то в поперечном сечении $I—I$ (рис. 2.97, б) возникнут два внутренних силовых фактора: нормальная сила $N = F \cos \alpha$ и изгибающий момент $M_z = Fx \sin \alpha$. Следовательно, такое нагружение бруса вызывает сочетание изгиба с растяжением (сжатием).

Считая, что брусья обладают большой жесткостью на изгиб*, согласно принципу независимости действия сил, можно утверждать, что в любом сечении возникают напряжения растяжения (или сжатия)

$$\sigma_N = \frac{N}{A},$$

напряжения изгиба

$$\sigma_{Mz} = \frac{M_z}{J_z} y.$$

Таким образом, суммарные напряжения в любом сечении бруса находят алгебраическим сложением напряжений σ_N и σ_{Mz} :

* Под действием поперечных и осевых нагрузок на длинные и тонкие, а следовательно гибкие, брусья наблюдаются большие прогибы, вызывающие значительные изменения в направлении действия осевых нагрузок.

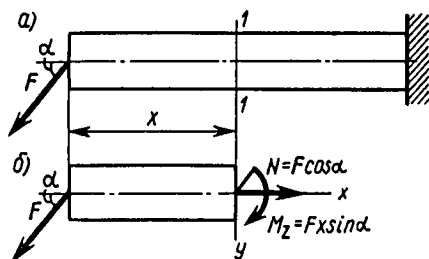


Рис. 2.97

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z y}{J_z}. \quad (2.97)$$

При расчетах на прочность исходят из наибольших напряжений, возникающих в любом сечении. В частности, если сечение бруса симметрично относительно нейтральной оси, то

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z}. \quad (2.98)$$

При определении напряжений по формулам (2.97) и (2.98) значения напряжений следует подставлять с их знаками.

Пример 2.27. Стальной брус квадратного сечения нагружен, как показано на рис. 2.98. Проверить прочность бруса при $[\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1. Находим реакции опор балок. Горизонтальная составляющая реакции неподвижного шарнира $R_{Ax} = F_2 = 4000 \text{ Н}$, вертикальные реакции опор $R_{Ay} = R_B = F_1/2 = 400 \text{ Н}$.

2. Нормальная сила в любом сечении бруса $N = -R_{Ax} = -4000 \text{ Н}$ (осевая нагрузка F_2 сжимает брус); площадь поперечного сечения $A = a^2 = 100 \text{ мм}^2$; изгибающий момент достигает наибольшего значения в сечении C (под силой F_1):

$$M_{zC} = R_{Ay} \cdot AC = 400 \cdot 0,5 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} = 20 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм};$$

момент сопротивления бруса при изгибе

$$W_x = a^3 / 6 = 10^3 / 6 \text{ мм}^3.$$

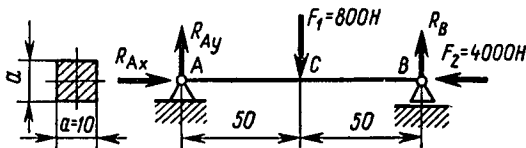


Рис. 2.98

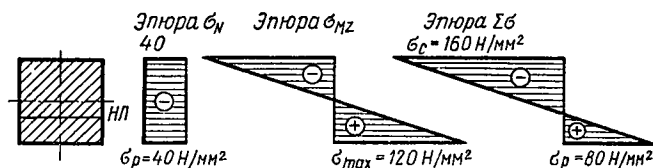


Рис. 2.99

3. Подставляя найденные в п. 2 значения величин в формулу (2.98), находим максимальные напряжения в опасном сечении бруса, расположенном в центре пролета:

$$\max |\sigma| = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -\frac{4000}{100} \pm \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 6}{10^3} = (-40 \pm 120) \text{ Н/мм}^2.$$

Для большей наглядности последующих действий построим эпюры нормальных напряжений, возникающих в опасном сечении (рис. 2.99). На рис. 2.99, а изображена эпюра $\sigma_N = N/A$, из которой видно, что напряжения сжатия ($\sigma_N < 0$) по сечению расположены равномерно; на рис. 2.99, б изображена эпюра $\sigma_{M_z} = M_z/W_z$, показывающая, что верхняя часть сечения лежит в зоне сжатия, а нижняя — в зоне растяжения.

Из последнего равенства следует, что наибольшие напряжения растяжения возникли в нижних крайних точках сечения:

$$\max \sigma_p = |-40 + 120| = 80 \text{ Н/мм}^2,$$

а наибольшие напряжения сжатия появились в верхних точках сечения:

$$\max \sigma_c = |-20 - 120| = 160 \text{ Н/мм}^2.$$

Таким образом, прочность бруса достаточная: наибольшее по абсолютному значению напряжение в опасном сечении не превышает $[\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2$. Эпюра суммарных напряжений построена на рис. 2.99, в. Заметим, что нейтральная линия в сечении бруса параллельна центральной оси инерции.

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличается кривой изгиб от поперечного?
2. Может ли кривой изгиб быть чистым?
3. Возникновение каких внутренних силовых факторов характеризует сочетание изгиба с растяжением (сжатием)?

ГЛАВА 8. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

§ 2.33. Понятие о напряженном состоянии в точке упругого тела

Как сказано в § 2.8, напряженное состояние в точке тела определяется совокупностью нормальных и касательных напряжений, возникающих в сечениях, проведенных через эту точку. Наглядной моделью,

характеризующей напряженное состояние в точке, служит вырезанный из тела элемент в виде прямоугольного параллелепипеда с исследуемой точкой внутри. При уменьшении размеров параллелепипеда он стягивается в точку и можно считать, что любая из граней параллелепипеда проходит через данную точку.

В общем случае на трех любых взаимно перпендикулярных гранях элемента возникают различные полные напряжения, каждое из которых можно разложить на три составляющие (рис. 2.100, а): одну, направленную по нормали к площадке, и две, лежащие в ее плоскости. Индексы нормальных напряжений σ соответствуют осям, перпендикулярным данным площадкам, а касательные напряжения τ имеют два индекса: первый соответствует оси, перпендикулярной площадке, а второй — оси, вдоль которой направлен вектор данной касательной составляющей.

Таким образом, на трех взаимно перпендикулярных площадках элемента в общем случае возникают девять компонентов, характеризующих напряженное состояние в точке тела (рис. 2.100, а). Такие же девять составляющих напряжений, но противоположно направленных, возникают в трех невидимых гранях элемента (на рисунке они не изображены).

Заметим, что в соответствии с законом парности касательных напряжений (см. § 2.8), вытекающим из условия равновесия выделенного элемента, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, т. е. на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательные напряжения, перпендикулярные общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра.

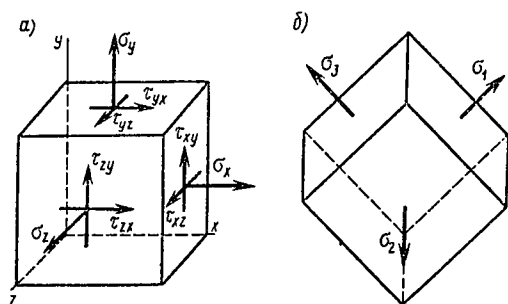


Рис. 2.100

Следовательно, из девяти компонентов независимы друг от друга только шесть. И если эти независимые друг от друга напряжения известны, то методами статики можно определить напряжения в любой другой плоскости, проходящей через данную точку (частный случай подобной задачи рассмотрен в § 2.8). Таким образом, *напряженное состояние в точке известно, если определены напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку.*

Оказывается, что через заданную точку напряженного тела всегда возможно провести, три взаимно перпендикулярные плоскости, в которых касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ и $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$ и возникают только нормальные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 (рис. 2.100, б). В этом случае три взаимно перпендикулярные площадки элемента называются *главными площадками*, нормальные напряжения в них — *главными напряжениями*. Причем индексы 1, 2 и 3 характеризуют порядок уменьшения алгебраических значений главных напряжений, т. е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Например, если одно из главных напряжений равно нулю, другое равно 60 МПа, третье равно —140 МПа, то их следует обозначить так: $\sigma_1 = 60$ МПа; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -140$ МПа.

Виды напряженного состояния классифицируются обычно по главным напряжениям. Различные случаи напряженного состояния показаны на рис. 2.101. Напряженное состояние, в котором все три главных напряжения отличны от нуля, называют *трехосным* или *объемным* (рис. 2.101, а, б, в). Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то

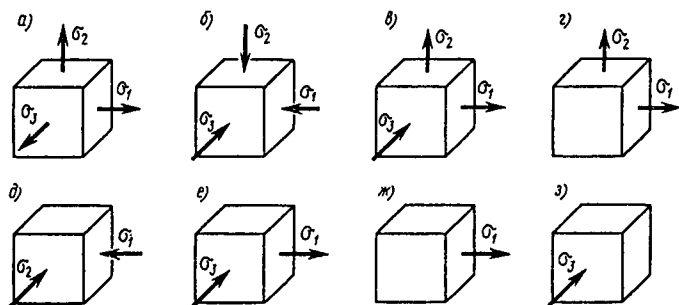


Рис. 2.101

образуется *двухосное*, или *плоско*, напряженное состояние (рис. 2.101, *г*, *д*, *е*). Когда только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два дру-

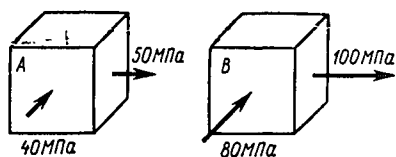


Рис. 2.102

гих равны нулю, напряженное состояние называется *одноосным* или *линейным* (рис. 2.101, *ж*, *з*).

Напряженное состояние в какой-либо точке одного тела можно сравнивать с напряженным состоянием в точке другого тела только в том случае, если напряженные состояния в точках подобны друг другу, т. е. такие, которые характеризуются соответственно пропорциональными главными напряжениями, имеющими одинаковые знаки, т. е. $\sigma'_1 : \sigma'_2 : \sigma'_3 = \sigma''_1 : \sigma''_2 : \sigma''_3$. Например, на рис. 2.102 показаны подобные напряженные состояния в точках *A* и *B*, но состояние в точке *B* в два раза опасней.

Таким образом, если бы мы знали главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 , возникающие в исследуемой точке тела, а также соответствующие предельные напряжения $\sigma_{пр1}$, $\sigma_{пр2}$, $\sigma_{пр3}$ в точке тела при напряженном состоянии, подобном исследуемому, то могли бы определить *коэффициент запаса прочности*:

$$s = \sigma_{пр1} / \sigma_1 = \sigma_{пр2} / \sigma_2 = \sigma_{пр3} / \sigma_3.$$

Такой путь расчета на прочность, приемлемый для одноосного напряженного состояния, невозможен в других случаях из-за разнообразия материалов, обилия различных напряженных состояний и невозможности воспроизвести каждое из них в лабораторных условиях в целях исследования.

Оценку прочности элемента конструкции в условиях какого угодно напряженного состояния предлагает теория предельных напряженных состояний, суть которой кратко изложена в следующем параграфе.

§ 2.34. Гипотезы прочности и их назначение

Как известно (см. § 2.10), предельным напряжением для пластичного материала является предел текучести σ_t , а для хрупкого — предел прочности σ_b . Поэтому предельное напряженное состояние у плас-

тичных материалов наступает при возникновении остаточных деформаций, а у хрупких — при начале разрушения.

Основная задача теории предельных напряженных состояний состоит в разработке критерия, позволяющего сравнивать между собой разнотипные напряженные состояния с точки зрения близости их к предельному состоянию. Сравнение разнотипных напряженных состояний производится с помощью эквивалентного напряженного состояния, причем за эквивалентное берется наиболее изученное напряженное состояние при простом растяжении. Напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его состояние было равноопасным исследуемому напряженному состоянию, называется *эквивалентным* и обозначается σ_3 .

Определение коэффициента запаса прочности по теории предельных напряженных состояний можно представить такой условной схемой (рис. 2.103): переход от исследуемого напряженного состояния *A* к эквивалентному напряженному состоянию *B* производится на основе критерия, предопределяющего возникновение предельного состояния, а затем *эквивалентное напряженное состояние B* сравнивается с подобным ему предельным напряженным состоянием *C* и определяется коэффициент запаса

$$s = \frac{\sigma_{пр}}{\sigma_3}. \quad (2.99)$$

Универсального критерия, предопределяющего предельное напряженное состояние для любого материала, нет. Разработка критериев предельных напряженных состояний основывается на различных гипотезах о преимущественном влиянии того или иного фактора на прочность материала.

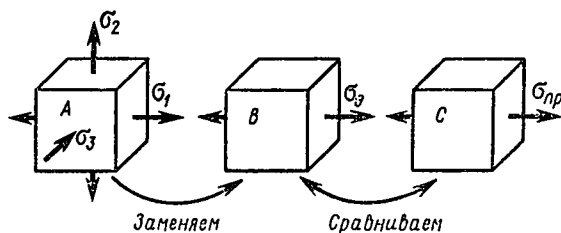


Рис. 2.103

Первая гипотеза прочности была выдвинута Галлилеем в XVII в. и состояла в том, что причиной разрушения материала является наибольшее нормальное напряжение растяжения σ_r или сжатия σ_c без учета двух других главных напряжений. Экспериментальная проверка не подтвердила этой гипотезы в отношении двухосного и трехосного напряженных состояний.

Вторая гипотеза была выдвинута в 1682 г. Э. Мариоттом; согласно этой гипотезе, прочность материала в исследуемой точке достигает критического состояния при максимальном значении линейной деформации ϵ . Экспериментальная проверка и в этой гипотезе обнаружила ряд весьма существенных недостатков.

Третья гипотеза, предложенная Ш. Кулоном в 1773 г., предполагает, что предельное напряженное состояние возникает в момент, когда в двух взаимно перпендикулярных сечениях, проведенных через исследуемую точку, наибольшие касательные напряжения достигают предельного значения, при котором возможно разрушение путем сдвига и скольжения одной части материала по другой. Эта гипотеза более совершенна, чем первые две, но применима лишь для пластичных материалов, т. е. при условии, если $\sigma_{вр} = \sigma_{вс}$ и для напряженных состояний, у которых σ_1 и σ_3 имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Согласно третьей гипотезе, при переходе от состояния *A* к состоянию *B* (рис. 2.103)

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (2.100)$$

Четвертая гипотеза, предложенная О. Мором в 1900 г., базируется не на каком-либо одном факторе σ , ϵ или τ , а на двух σ и τ , а потому она более совершенна, чем предыдущие три. Экспериментальная проверка показала, что полученный на основе четвертой гипотезы критерий перехода от исследуемого напряженного состояния *A* к эквивалентному *B* (рис. 2.103) справедлив как для пластичных, так и для хрупких материалов и дает наилучшие результаты, если σ_1 и σ_3 имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Согласно критерию,

$$\sigma_2 = \sigma_1 - v\sigma_3, \quad (2.101)$$

где для хрупких материалов $v = \sigma_{вр}/\sigma_{вс}$, а для

пластичных материалов $\nu = \sigma_{\text{тр}} / \sigma_{\text{те}}$. В частном случае, когда пределы текучести материала при растяжении и сжатии одинаковы ($\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{те}}$), $\nu = 1$ и формула (2.101) приводится к формуле (2.100).

Пятая гипотеза прочности иначе называется *гипотезой энергии формоизменения*, и критерий перехода от исследуемого напряженного состояния *A* (рис. 2.103) к эквивалентному состоянию *B* основан на том, что предельное напряженное состояние возникает при некотором значении потенциальной энергии, накапливаемой элементом конструкции при изменении только его формы. Согласно этой гипотезе,

$$\sigma_3 = \sqrt{0,5 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (2.102)$$

Первоначальную идею энергетической гипотезы, выдвинутую в 1885 г. Бельтрами, усовершенствовал львовский проф. А. Губер (в 1904 г.), а затем уточнили Р. Мизес (в 1913 г.) и Г. Генки (в 1924 г.). Экспериментальная проверка пятой гипотезы показала, что она справедлива только для пластичных материалов, у которых $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{те}}$, но критерий перехода здесь точней, чем у третьей гипотезы.

В настоящее время из пяти гипотез прочности используются лишь последние три. Расчеты по гипотезам прочности во многих случаях избавляют проектировщиков и конструкторов от необходимости подвергать проектируемые конструкции и детали непосредственным испытаниям на прочность

§ 2.35. Расчеты бруса круглого поперечного сечения при изгибе с кручением

Представим себе, что стальной брус круглого поперечного сечения нагружен двумя парами сил таким образом (рис. 2.104, *a*), что плоскость действия первой перпендикулярна оси бруса, а плоскость действия второй проходит через ось бруса. Тогда момент M_1 первой пары скручивает брус, а момент M_2 второй пары его изгибает. При таком нагружении бруса в его поперечных сечениях возникают два внутренних силовых фактора — крутящий M_k и изгибающий $M_{\text{и}}$ моменты, причем по всей длине бруса $M_k = M_1$, а $M_{\text{и}} = M_2$ (рис. 2.104, *б, в*).

Как известно, при кручении наибольшие касатель-

ные напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от оси бруса (см. рис. 2.45), а при изгибе наибольшие нормальные напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси (см. рис. 2.77). Следовательно, у бруса на рис. 2.104, а наиболее опасное напряженное состояние возникает в точках, наиболее удаленных от оси x . Выделим одну из таких точек (точку A) и изобразим ее в виде элемента, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.104, з). Тогда увидим, что напряженное состояние в точке A характеризуется нормальными напряжениями σ , действующими по площадкам элемента, совпадающим с поперечными сечениями бруса, и касательными напряжениями τ , действующими по этим же и перпендикулярным им площадкам (закон парности).

Выразив эквивалентные напряжения через напряжения σ и τ в поперечном сечении бруса (а не через главные напряжения), получим из формулы (2.100) по третьей гипотезе прочности следующее выражение:

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (2.103)$$

а из формулы (2.102) по пятой гипотезе

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (2.104)$$

В обе формулы входят напряжение изгиба $\sigma = M_{II}/W_{oc}^*$ и напряжение кручения $\tau = M_K/W_p$. Сравним между собой значение момента сопротивления при

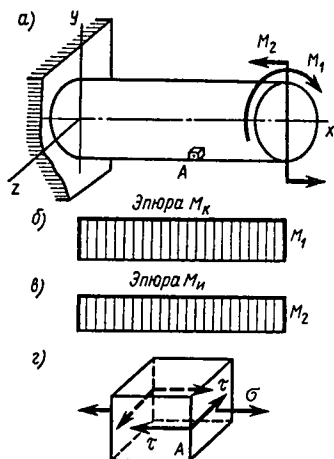


Рис. 2.104

* У круга любая центральная ось главная, поэтому момент сопротивления круглого сечения отмечен индексом «ос» — осевой, а изгибающий момент — индексом «и».

изгибе $W_{oc} = \pi d^3 / 32$ и значение момента сопротивления при кручении $W_p = \pi d^3 / 16$ у одного и того же сечения, заметим, что $W_p = 2W_{oc}$.

Поэтому, подставив в формулы (2.103) и (2.104) вместо σ и τ их значения из $\sigma = M_n / W_{oc}$ и $\tau = M_k / W_p = M_k / (2W_{oc})$, получим соответственно

$$\sigma_{III} = \frac{\sqrt{M_n^2 + M_k^2}}{W_{oc}} \quad (2.105)$$

и

$$\sigma_{IV} = \frac{\sqrt{M_n^2 + 0,75 M_k^2}}{W_{oc}}. \quad (2.106)$$

Таким образом, рассчитывая брус при изгибе с кручением, эквивалентные напряжения можно определить сразу через значения изгибающего и крутящего моментов, возникших в опасном сечении бруса.

Арифметическое значение корней в числителях формул (2.105) и (2.106) иногда называют эквивалентным моментом и обозначают M_3 :

$$M_{3,III} = \sqrt{M_n^2 + M_k^2} \text{ и } M_{3,IV} = \sqrt{M_n^2 + 0,75 M_k^2}.$$

Используя это обозначение, условие прочности запишем в таком виде:

$$\sigma_3 = \frac{M_3}{W_{oc}} \leq [\sigma]. \quad (2.107)$$

При этом надо иметь в виду, что при пространственном нагружении вала, например в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 2.105, а), в его сечениях кроме крутящего момента M_k под воздействием вертикальных сил возникает изгибающий момент M_z , а под воздействием горизонтальных сил изгибающий момент M_y (рис. 2.105, б). Если изобразить эти моменты векторами M_k , M_z , M_y (рис. 2.105, в), то увидим, что изгибающий момент M_n есть геометрическая сумма моментов M_z и M_y и его модуль

$$M_n = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Поэтому при пространственном нагружении вала в случае применения третьей гипотезы прочности

$$M_{3,III} = \sqrt{M_n^2 + M_k^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}, \quad (2.108)$$

а в случае применения пятой гипотезы

$$M_{3,IV} = \sqrt{M_n^2 + 0,75 M_k^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75 M_k^2}, \quad (2.109)$$

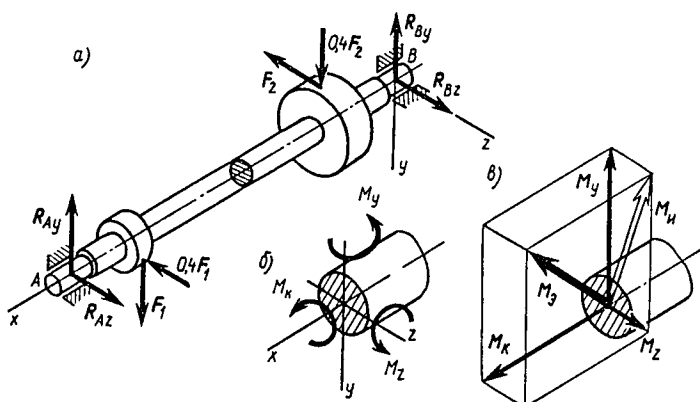


Рис. 2.105

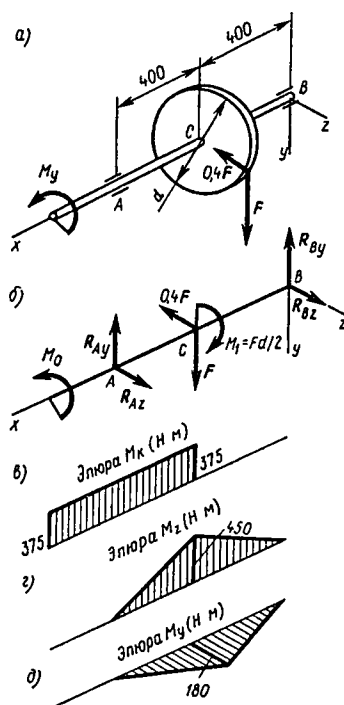


Рис. 2.106

Пример 2.28. Из условия прочности рассчитать необходимый диаметр вала (рис. 2.106, а), передающего мощность $P = 15$ кВт от левого конца к зубчатому колесу при частоте вращения $n = 382$ об/мин. Принять $[\sigma] = 80$ Н/мм², диаметр колеса $d = 1/3$ м

Решение. 1. Составим расчетную схему вала (рис. 2.106, б), для этого приведем силу F к точке C на оси вала, присоединив пару сил с моментом $M_1 = F \frac{d}{2}$, и освободим вал в точках A и B от опор, заменив их реакциями в горизонтальной (R_{Ax}, R_{Bx}) и вертикальной (R_{Ay}, R_{By}) плоскостях.

2. Исходя из того, что вал передаст мощность $P = 15 \text{ кВт} = 15 \cdot 10^3 \text{ Вт}$ при частоте вращения n , соответствующей угловой скорости $\omega = \frac{\pi n}{30}$, находим вращающий момент M_0 , приложенный к левому концу вала:

$$M_0 = \frac{P}{\omega} = \frac{P \cdot 30}{\pi n} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 30}{\pi \cdot 382} = 375 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Из равенства моментов $M_0 = M_1 = \frac{Fd}{2}$ находим касательную силу:

$$F = \frac{2M_0}{d} = 2 \cdot 375 \cdot 3 = 2250 \text{ Н}.$$

Следовательно, радиальная сила

$$0,4F = 0,4 \cdot 2250 = 900 \text{ Н}.$$

4. Реакции опор находим из условия симметричности их расположения относительно зубчатого колеса:

$$R_{Ax} = R_{Bx} = \frac{0,4F}{2} = \frac{900}{2} = 450 \text{ Н};$$

$$R_{Ay} = R_{By} = F/2 = \frac{2250}{2} = 1125 \text{ Н}.$$

5. На участке от левого конца до зубчатого колеса вал скручивается моментами M_0 и M_1 . Следовательно, в любом сечении на этом участке крутящий момент $M_z = |M_0| = |M_1| = 375 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и эпюра M_z имеет вид, показанный на рис. 2.106, в.

6. Под действием сил F, R_{Ax} и R_{Bx} вал изгибается на участке между опорами в вертикальной плоскости. В сечениях, проходящих через точки A и B , изгибающие моменты равны нулю, а наибольшего значения изгибающий момент M_z достигает в сечении, совпадающем со средней плоскостью колеса:

$$M_{zC} = R_{Ay} \cdot AC = R_{By} \cdot BC = 1125 \cdot 0,4 = 450 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M_z изображена на рис. 2.106, г.

7. Под действием сил $0,4F, R_{Ax}$ и R_{Bx} вал изгибается на том же участке, но в горизонтальной плоскости. Наибольший изгибающий момент (рис. 2.106, д) наблюдается в том же сечении:

$$M_{yC} = R_{Ax} \cdot AC = R_{Bx} \cdot BC = 450 \cdot 0,4 = 180 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

8. Применяя третью гипотезу прочности, по формуле (2.108) определяем эквивалентный момент в опасном сечении вала:

$$M_z = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_x^2} = \sqrt{450^2 + 180^2 + 375^2} =$$

$$= 613 \text{ Н} \cdot \text{м} = 613 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

9. Из условия прочности (2.107) находим требуемый момент сопротивления вала

$$W_{oc} = \frac{M_z}{[\sigma]} = \frac{613 \cdot 10^3}{80} = 7663 \text{ мм}^3$$

10. Из формулы (2.84) находим диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 W_{oc}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7663}{\pi}} = 43 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр вала $d = 45 \text{ мм}$.

Вопросы для самопроверки

1. Каким образом можно представить себе картину напряженного состояния в точке?
2. Какие площадки и напряжения называются исходными, а какие — главными?
3. Что такое гипотезы прочности и в каких случаях возникает необходимость их использования?
4. Что такое эквивалентные напряжения?
5. Что такое суммарный изгибающий момент и что такое эквивалентный момент?

ГЛАВА 9. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 2.36. Устойчивость упругого равновесия. Критическая сила

Как указывалось в § 2.1, третьей задачей сопротивления материалов являются расчеты конструкции на устойчивость. Из физики известно, что равновесие тела устойчиво, если при малом отклонении от равновесного положения возникает сила или пара сил, возвращающая его в положение равновесия. Кроме устойчивого известны также неустойчивое и безразличное равновесия, но для механических конструкций допустимы лишь случаи устойчивого равновесия. Если по каким-либо причинам упругое тело или конструкция при отклонении от равновесного положения не возвращается к исходному, то говорят, что произошла потеря устойчивости.

Явление потери устойчивости упругого тела рассмотрим на примере сжатого стержня. Представим, что на прямолинейный стальной стержень, зажатый одним концом в вертикальном положении (рис. 2.107, а), сверху надет шар. При небольшом

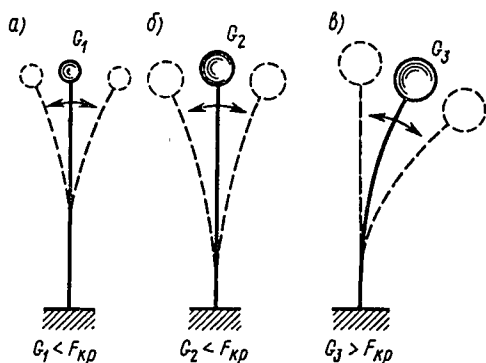


Рис. 2.107

значении силы тяжести G_1 , сжимающей стержень, он сохраняет прямолинейную форму и находится в устойчивом равновесии. Действительно, если отклонить шар вместе с верхней частью стержня в сторону, то под действием упругих сил стержень, поколебавшись около положения равновесия, снова примет прямолинейную форму. Постепенно увеличивая сжимающую нагрузку путем установки более тяжелых шаров (рис. 2.107, б), увидим, что стержень хотя и сохраняет прямолинейную форму, но при отклонении от положения равновесия возвращается в исходное положение гораздо медленнее. Наконец, при некоторой нагрузке G_3 (рис. 2.107, в) стержень изогнется, и прямолинейная форма устойчивого равновесия переходит в новую, криволинейную, форму устойчивого равновесия. Если теперь стержень принудительно выпрямить или, наоборот, изогнуть еще больше, он после нескольких колебаний займет исходное равновесное положение в изогнутом состоянии.

Максимальная сжимающая нагрузка $F_{кр}$, при которой прямолинейная форма стержня устойчива, называется *критической силой*.

Смысл расчета на устойчивость сжатого стержня заключается в том, чтобы он при некотором значении F осевой нагрузки сохранял устойчивость прямолинейной формы и обладал при этом некоторым запасом устойчивости

$$s_y = \frac{F_{кр}}{F}.$$

Если коэффициент запаса устойчивости задан $[s_y]$,

условие устойчивости сжатого стержня выражается неравенством

$$s_y = \frac{F_{кр}}{F} \geq [s_y]. \quad (2.110)$$

Полагая в выражении (2.110) $s_y = [s_y]$, можно получить допускаемое значение нагрузки

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[s_y]}. \quad (2.111)$$

Чтобы воспользоваться этими расчетными формулами при проверке устойчивости сжатого стержня или определении допускаемой нагрузки, необходимо уметь определять значение критической силы $F_{кр}$.

§ 2.37. Формула Эйлера

Задачу определения критической силы впервые чисто математически решил Л. Эйлер в 1744 г.* Экспериментальное подтверждение этого решения было получено в 1840 г. Решение задачи Эйлера подробно изложено, например, в учебниках [7, 13]. Здесь же приведен лишь ее окончательный результат.

Для шарнирно закрепленного с обоих концов стержня длиной l (рис. 2.108) формула Эйлера имеет вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} \quad (2.112)$$

Как видим, в формулу входит минимальное значение момента инерции площадки поперечного сечения стержня, так как потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости. Например, если стержню на рис. 2.108 придать форму пластинки прямоугольного поперечного сечения, то он, теряя устойчивость, отклонится от плоскости, проходящей через ось, параллельную длинным сторонам поперечного сечения.

Экспериментальные исследования, связанные с проверкой формулы Эйлера,



Рис. 2.108

* Леонард Эйлер (1707—1783) член Петербургской и Берлинской академий наук.

показывают, что при прочих равных условиях (одинаковые материал, форма и размеры поперечного сечения, а также длина стержня) значение критической силы зависит от способа закрепления его концов.

Ось стержня, шарнирно закрепленного с обоих концов, при потере устойчивости приобретает вид полуволны синусоиды (штриховая линия на рис. 2.108). Используя это обстоятельство, оказалось возможным формулу (2.112) распространить и на другие случаи закрепления стержня, заменив длину l ее приведенным значением

$$l_{\text{пр}} = \mu l, \quad (2.113)$$

где μ — коэффициент приведения длины, т. е. число, показывающее, во сколько раз следует увеличить длину шарнирно закрепленного с обоих концов стержня, чтобы критическая сила для него была равна критической силе стержня в данных условиях закрепления.

Таким образом, общее выражение критической силы стержня при любом способе закрепления его концов примет вид

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (2.114)$$

На рис. 2.109 изображены несколько случаев закрепления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента приведения μ : а) оба конца шарнирно закреплены; б) один конец жестко закреплен, другой свободен; в) один конец жестко закреплен, другой шарнирно; г) один конец жестко закреплен, другой шарнирно; д) один конец жестко закреплен, другой шарнирно; е) один конец жестко закреплен, другой шарнирно.

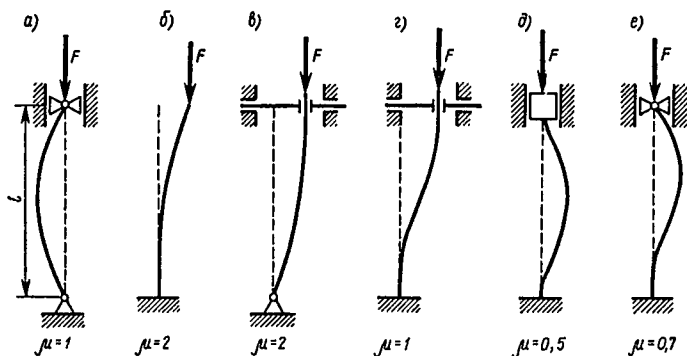


Рис. 2.109

второй имеет «плавающую» заделку; г) один конец заделан жестко, второй имеет «плавающую» заделку; д) оба конца заделаны жестко; е) один конец заделан жестко, другой закреплен шарнирно.

§ 2.38. Критическое напряжение. Пределы применимости формулы Эйлера

При осевом нагружении стержня в его поперечных сечениях возникают нормальные напряжения сжатия, которые возрастают по мере увеличения нагрузки. Нормальные напряжения, соответствующие критической силе, называются критическими:

$$\sigma_{кр} = F_{кр}/A, \quad (2.115)$$

или после подстановки значения критической силы из формулы (2.114)

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 A}.$$

В последнюю формулу входят две геометрические характеристики площади сечения стержня: минимальный момент инерции J_{\min} и площадь A . Частное от деления J_{\min}/A представляет собой величину, имеющую единицу площади м^2 , см^2 , мм^2 . Поэтому линейную величину $\sqrt{J_{\min}/A} = i_{\min}$ называют минимальным радиусом инерции сечения.

Таким образом, $J_{\min}/A = i_{\min}^2$ и последняя формула принимает вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} \quad \text{или} \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(\mu/l_{\min})^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Безразмерная величина $\mu l/i_{\min} = \lambda$ называется *гибкостью* стержня. Она характеризует сопротивляемость стержня потере устойчивости; с увеличением гибкости уменьшается сопротивляемость стержня потере устойчивости. Заметим, что гибкость λ стержня не зависит от материала стержня, а определяется его длиной, формой и размерами сечения.

Определяя значение критической силы, Эйлер исходил из рассмотрения упругой линии изогнутого стержня, поэтому формула

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.116)$$

справедлива только в пределах применимости закона Гука, иначе говоря, до тех пор, пока критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала стержня, т. е. при условии

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{пц}.$$

Отсюда

$$\lambda \geq \pi \sqrt{E / \sigma_{пц}}.$$

Стоящая в правой части неравенства постоянная для данного материала безразмерная величина называется *предельной гибкостью*:

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{E / \sigma_{пц}}. \quad (2.117)$$

Таким образом, применимость формулы Эйлера определяется условием

$$\lambda \geq \lambda_{пред}. \quad (2.118)$$

Формула Эйлера применима только в тех случаях, когда гибкость стержня больше или равна предельной гибкости того материала, из которого он изготовлен.

Как правило, многие конструкции имеют стержни с гибкостью меньше предельной. Разработку современных методов расчета на устойчивость таких стержней начал Ф. С. Ясинский*, который предложил приближенные формулы для определения критических напряжений за пределом пропорциональности, проанализировав предварительно обширный экспериментальный материал и построив графические зависимости между $\sigma_{кр}$ и λ для многих материалов. График зависимости $\sigma_{кр}$ от λ для стержней из пластичного материала (низкоуглеродистой стали) показан на рис. 2.110.

В результате исследований подобных графиков стержни условно делятся на три группы. Стержни большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{пред}$), для которых критические напряжения определяются по формуле Эйлера (2.116). Стержни средней гибкости ($\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{пред}$), для которых критические напряжения определяются по

* Ф. С. Ясинский (1856—1899) — профессор Петербургского института путей сообщений.

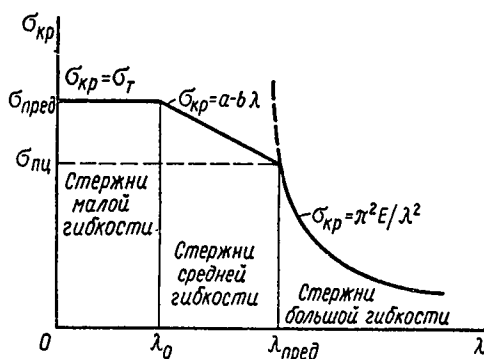


Рис. 2.110

формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (2.119)$$

где коэффициенты a и b имеют для каждого материала определенное значение, найденное экспериментально. Некоторые значения этих коэффициентов, а также гибкостей λ_0 и $\lambda_{пред}$, в интервале между которыми применима для данного материала формула Ясинского, приведены в табл. 2.3.

Стержни малой гибкости ($\lambda < \lambda_0$), для которых $\sigma_{кр}$ соответствует $\sigma_{пред}$, т. е. $\sigma_{кр} = \sigma_t$ для пластичных материалов и $\sigma_{кр} = \sigma_{вс}$ для хрупких материалов. Такие стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность, как при простом сжатии.

Пример 2.29. Определить запас устойчивости винта домкрата грузоподъемностью $F = 60$ кН, высотой подъема $l = 500$ мм. Резьба упорная самотормозящая, наружный диаметр резьбы $d = 48$ мм, внутренний $d_1 = 34,116$ мм. Материал сталь 45 ($E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм², $\sigma_{пл} = 270$ Н/мм²).

Таблица 2.3

Материалы	<i>a</i>	<i>b</i>	λ_0	$\lambda_{пред}$
	МПа или Н/мм ²			
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20, Ст4	328	1,15	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Дюралюмин Д16Т	406	1,83	30	53
Сосна, сль	29,3	0.194	—	70

Решение. 1. Рассматривая винт домкрата как стойку высотой l , диаметром d_1 с нижним зашкеленным концом (рис. 2.111), примем коэффициент приведения длины $\mu = 2$ (см. рис. 2.109).

2. Определим по формуле (2.117) предельную гибкость винта:

$$\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{ну}}}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{270}} = 85,5.$$

3. Определив минимальный радиус инерции сечения винта.

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d_1^4}{64 \pi d_1^2}} = \frac{d_1}{4} = \frac{31,116}{4} = 8,53 \text{ мм},$$

находим гибкость винта

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{2 \cdot 500}{8,53} = 117$$

Таким образом,

$$\lambda = 117 > \lambda_{\text{пред}} = 85,5,$$

т. е. формула Эйлера применима.

4. Имея в виду, что минимальный момент инерции сечения винта

$$J_{\text{min}} = J = \frac{\pi d_1^4}{64},$$

по формуле (2.114) находим значение критической силы

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^3 E d_1^4}{(\mu l)^2 64} = \frac{\pi^3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 31,116^4}{(2 \cdot 500)^2 64} = 131 \cdot 10^3 \text{ Н} = 131 \text{ кН}.$$

5. По формуле (2.110) находим действительный коэффициент запаса устойчивости

$$s_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{131}{60} = 2,18.$$

6. Для винтов домкрата принимают допускаемый коэффициент запаса устойчивости $[s_y] = 4$. Следовательно, в данном случае коэффициент устойчивости винта недостаточен, необходимо увеличить диаметр резьбы.

Пример 2.30. Определить допускаемую нагрузку $[F]$ для стойки (рис. 2.112) при $[s_y] \geq 4$. Материал сталь Ст3. $\sigma_{\text{ну}} = 200 \text{ Н/мм}^2$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. 1 По формуле (2.117) определяем гибкость материала стойки

$$\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{ну}}}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} = 99,5.$$

2. Находим гибкость стойки

$$\lambda = \mu l / i_{\text{min}},$$

где в данном случае коэффициент приведения длины $\mu = 0,5$ (см. рис. 2.109, б), $l = 1,2 \text{ м} = 1200 \text{ мм}$ и минимальный радиус инерции

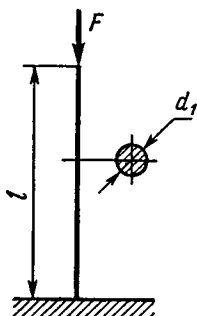


Рис. 2.111

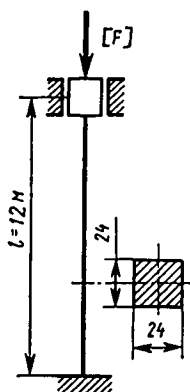


Рис. 2.112

квадратного сечения стойки

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{24}{2\sqrt{3}} = 6,93 \text{ мм.}$$

Таким образом,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1200}{6,93} = 86,5 < \lambda_{\text{пред}} = 99,5.$$

Следовательно, формула Эйлера неприменима.

3. По формуле Ясинского (2.119) определяем критическое напряжения, приняв по табл. 2.3 для материала стойки (сталь Ст3) $a = 310 \text{ Н/мм}^2$ и $b = 1,14 \text{ Н/мм}^2$:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 86,5 = 211 \text{ Н/мм}^2$$

4. Из формулы (2.115) находим критическую силу для стойки:

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 211 \cdot 24^2 \approx 122 \cdot 10^3 \text{ Н} = 122 \text{ кН.}$$

5. По формуле (2.111) находим допускаемое значение нагрузки:

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[s_y]} = \frac{122}{4} \approx 30 \text{ кН.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется критической силой?
2. Что такое гибкость стержня и от чего она зависит?
3. Что такое предельная гибкость и зависит ли эта величина от размеров стержня?
4. Каковы наиболее рациональные формы поперечных сечений сжатых стержней?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аркуша А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике. М., 1978.
2. Гернет М. М. Курс теоретической механики. М., 1973.
3. Геронимус Я. Л. Теоретическая механика: Очерки об основных положениях. М., 1973.
4. Гордон Дж. Конструкции или почему не ломаются вещи. М., 1980.
5. Зубов В. Г. Механика. М., 1978.
6. Ицкович Г. М. Методика преподавания сопротивления материалов в техникумах. Минск, 1974.
7. Ицкович Г. М. Сопротивление материалов. М., 1986.
8. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики. М., ч. I, 1965; ч. II, 1969.
9. Космодемьянский А. А. Теоретическая механика и современная техника. М., 1969.
10. Никитин Е. М. Теоретическая механика для техникумов. М., 1988.
11. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М., 1979.
12. Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. М., 1976.
13. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., 1978.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

К первому разделу

Аксиомы динамики 167—169
— статики 10—15

Вращение замедленное 135
— относительное 158
— переносное 158
— равномерное 135
— равнопеременное 136

Главный вектор 47, 83
— момент 47, 83

Движение по инерции 167
— твердого тела плоскопараллельное 152, 153
— — — поступательное 130
— точки абсолютное 148
— — — относительное 148, 161, 163
— — — переносное 148, 161, 163
— — — сложное 148

Закон движения точки по заданной траектории 113
— вращательного движения тела 133

Законы трения скольжения 68

Импульс силы 193

Количество движения 194
Координатный способ задания движения точки 114
Коэффициент полезного действия 180—183
— трения качения 190
— — скольжения 67, 68
— устойчивости 106

Масса системы 198
Материальная точка, 7, 167, 170
Метод кинестатики 97
— остановки водила 164
Механическая система 197
Момент инерции тела 201—204
— кинетический 205
— силы относительно оси 81
— — — точки 43
— статический площади 93
Мощность 180, 189

Пара векторов 161

— сил 35
Пары эквивалентные 40
Передающее отношение 142, 143, 144, 145, 146
— число 147
Передача 142
— дифференциальная 163
— зубчатая 144
— многоступенчатая 146
— планетарная 163
— ременная 143
— фрикционная 144
Правило параллелепипеда 73
— параллелограмма 12
— треугольника 13
Принцип Даламбера 173
Проскляя силы 29, 75
Путь 109

Работа переменной силы на криволинейном пути 178
— при вращательном движении 188
— — качении тел 191
— равнодействующей силы 176
— силы на наклонной плоскости 184—187
— — — прямолинейном перемещении 175
Равновесие безразличное 103
— динамическое 167
— неустойчивое 103
— пар сил 42
— плоской системы параллельных сил 58
— — — сходящихся сил 27, 33
— при наличии трения 65
— произвольной плоской системы сил 56—58
— — пространственной — 85
— пространственной системы параллельных — 85
— — — сходящихся — 77
— статическое 167
— трех сил 13
— устойчивое 102
Равнодействующая сила 9
— пара сил 41
— сходящихся сил 26, 73, 74
Радиус инерции тела 201
— кривизны траектории 117
Расстояние 109, 140
Реакция идеальной связи 16—19
— реальной связи 65—67

Самоторможение 70, 71
Связи идеальные 16, 64, 66
— реальные 64, 66

Сила активная 16, 170, 173
 — внешняя 9, 197
 — внутренняя 10, 197
 — инерции 171, 172, 173
 — объемная 91
 — распределенная 60
 — сосредоточенная 60
 — трения 65, 67, 68
 — тяжести 91, 168
 Система отсчета 108, 148, 167
 — сил эквивалентная 9, 21
 Скорость абсолютная 150, 155
 — относительная 150
 — переносная 150
 — средняя 111, 115
 — угловая 133
 Сложение вращений вокруг осей 158, 161
 — пар сил 41
 — поступательного и вращательного движений 153
 — скоростей 117, 150

Тело несвободное 15
 — свободное 15
 Теорема Вариньона 51
 — Гюйгенса 160
 — об изменении кинетической энергии точки 196
 — — — количества движения 194
 Траектория 109, 115

Угол поворота 133
 — трения 67
 — устойчивости 105
 Уравнение движения центра масс 198
 — динамики вращательного движения тела 200
 Уравнения плоскопараллельного движения 153
 Ускорение касательное 118, 140
 — нормальное 119, 140
 — угловое 134

Формула Виллиса 162, 165
 — Галилея 125
 Формулы координат центра параллельных сил 91
 — — — тяжести тела 92, 93, 95

Центр масс 198
 — параллельных сил 89
 — скоростей мгновенный 156, 158
 — тяжести тела 91

Частота вращения 138

Энергия кинетическая 194, 205

Ко второму разделу

Временное сопротивление 233

Гибкость стержня 341, 342
 Гипотезы прочности 326—332

Деформация пластическая 208
 — поперечная 226
 — продольная 226
 — угловая 251
 — упругая 208
 Диаграмма растяжения 231, 233

Жесткость бруса при растяжении 227
 — сечения бруса при изгибе 296
 — — — — кручении 258
 — — — — растяжении 227

Закон Гука 226, 250, 294
 — парности касательных напряжений 230, 327

Изгиб косой 321
 — поперечный 216, 278, 321
 — прямой 278
 — чистый 216, 278, 321
 Интеграл Мора 311, 312

Коэффициент запаса прочности 235, 329
 — — устойчивости 338
 — приведения длины 340
 — Пуассона 226, 251

Метод сечений 213
 Модуль упругости 226
 — сдвига 251
 Момент изгибающий 215, 278, 282
 — инерции сечения осевой 267
 — — — полярный 257
 — — — центробежный 267
 — крутящий 215, 252
 — сечения статический 266
 — сопротивления сечения осевой 299
 — — — полярный 258
 — эквивалентный 334
 Моменты инерции главные 269

Нагрузка динамическая 211
 — повторно-переменная (циклическая) 210
 — статическая 210
 Напряжение 217

Напряжения главные 328

— допускаемые 235

— критические 341

— предельные 235

— смятия 246

— среза 246

— температурные 241

— эквивалентные 330

Напряженное состояние 228, 320,
328—330

Ось бруса 209,

Правило Верещагина 314

Предел пропорциональности 233

— прочности 233

— текучести 233

Принцип начальных размеров 212

— независимости действия сил 212

— Сен-Венана 224

Прогиб 309

Сдвиг чистый 250

Сила критическая 338

— нормальная (продольная) 215

— поперечная 215, 245, 281

Силовые факторы 214

Система статически неопределимая
239

Стрела прогиба 309

Угол закручивания 254, 255, 258, 260

— сдвига 251

Удлинение абсолютное 225

Упругая линия балки 308, 310

Уравнение нулевой линии 322

Условие жесткости при кручении 260

— — — изгибе 318

— прочности при — 298, 299

— — — кручении 259

— — — растяжении (сжатии) 236

— — — смятии 246

— — — срезу 246

Формула Журавского 305

— Эйлера 339

— Ясинского 343

Эпюра грузовая 314

— единичного момента 315

— единичной силы 314

— изгибающих моментов 282—289

— крутящих моментов 253

— поперечных сил 282—289

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Раздел первый. Теоретическая механика	
<i>Статика</i>	
Глава 1 Основные положения статики	7
§ 1.1. Общие сведения	7
§ 1.2. Аксиомы статики	10
§ 1.3. Связи и их реакции	15
Глава 2. Плоская система сходящихся сил	21
§ 1.4. Сложение двух сил, приложенных в точке тела	21
§ 1.5. Сложение плоской системы сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия	25
§ 1.6. Определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций. Аналитическое условие равновесия	28
Глава 3. Теория пар сил на плоскости	35
§ 1.7. Пара сил	35
§ 1.8. Эквивалентность пар сил	38
§ 1.9. Сложение пар сил. Условие равновесия пар	41
§ 1.10. Момент силы относительно точки	43
Глава 4. Плоская система произвольно расположенных сил ..	45
§ 1.11. Приведение силы к точке	45
§ 1.12. Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил	46
§ 1.13. Теорема Вариньона	51
§ 1.14. Частные случаи приведения плоской системы сил к точке. Условие равновесия	54
§ 1.15. Уравнения равновесия и их различные формы	56
§ 1.16. Балочные системы. Разновидности опор и виды нагрузок	59
§ 1.17. Реальные связи. Трение скольжения и его законы	64
Глава 5. Пространственная система сил	72
§ 1.18. Сложение пространственной системы сходящихся сил. Условие равновесия	72
§ 1.19. Момент силы относительно оси	79
§ 1.20. Произвольная пространственная система сил. Условие равновесия	82
Глава 6. Центр тяжести	88
§ 1.21. Центр параллельных сил	88
§ 1.22. Центр тяжести тела	91
§ 1.23. Определение координат центра тяжести плоских и пространственных фигур	95
§ 1.24. Устойчивость равновесия	102
<i>Кинематика</i>	
Глава 7 Кинематика точки	108
§ 1.25. Основные понятия кинематики	108
§ 1.26. Способы задания движения точки	113
§ 1.27. Определение скорости точки при естественном способе задания ее движения	115
§ 1.28. Определение ускорения точки при естественном способе задания ее движения	117
§ 1.29. Частные случаи движения точки. Кинематические графики	121
§ 1.30. Определение скорости и ускорения точки при ко-	

ординатном способе задания ее движения	128
Глава 8. Простейшие движения твердого тела	130
§ 1.31. Поступательное движение	130
§ 1.32. Вращательное движение. Угловая скорость; угловое ускорение	132
§ 1.33. Частные случаи вращательного движения	135
§ 1.34. Скорости и ускорения различных точек вращающегося тела	139
§ 1.35. Способы передачи вращательного движения	142
Глава 9. Сложное движение	148
§ 1.36. Сложное движение точки	148
§ 1.37. Плоскопараллельное движение тела	152
§ 1.38. Определения скорости любой точки тела	154
§ 1.39. Мгновенный центр скоростей	156
§ 1.40. Сложение двух вращательных движений	158
§ 1.41. Понятие о планетарных передачах. Формула Виллиса	162

Динамика

Глава 10. Движение несвободной материальной точки	167
§ 1.42. Основные понятия и аксиомы	167
§ 1.43. Свободная и несвободная точки	170
§ 1.44. Сила инерции	171
§ 1.45. Принцип Даламбера	173
Глава 11. Работа и мощность	175
§ 1.46. Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении	175
§ 1.47. Работа равнодействующей силы	176
§ 1.48. Работа переменной силы на криволинейном пути	178
§ 1.49. Мощность	180
§ 1.50. Механический коэффициент полезного действия ..	180
§ 1.51. Работа сил на наклонной плоскости	184
§ 1.52. Работа и мощность при вращательном движении тел	188
§ 1.53. Трение качения. Работа при качении тел	189
Глава 12. Общие теоремы динамики	193
§ 1.54. Импульс силы. Количество движения. Кинетическая энергия	193
§ 1.55. Теорема об изменении количества движения точки	194
§ 1.56. Теорема об изменении кинетической энергии точки	195
§ 1.57. Понятие о механической системе	197
§ 1.58. Основное уравнение динамики вращающегося тела	199
§ 1.59. Моменты инерции некоторых тел	201
§ 1.60. Кинетическая энергия тела. Кинетический момент	204

Раздел второй. Сопротивление материалов

Глава 1. Основные положения	207
§ 2.1. Задачи сопротивления материалов	207
§ 2.2. Классификация нагрузок	210
§ 2.3. Основные допущения	211
§ 2.4. Метод сечений. Виды нагружений	213
§ 2.5. Напряжения	217

Глава 2. Растяжение и сжатие	219
§ 2.6. Нормальные силы и напряжения в поперечном сечении бруса	219
§ 2.7. Перемещения и деформации. Закон Гука	225
§ 2.8. Напряженное состояние при одноосном растяжении	228
§ 2.9. Статические испытания материалов. Основные механические характеристики	231
§ 2.10. Расчеты на прочность	234
§ 2.11. Статически неопределимые системы	239
Глава 3. Практические расчеты на срез и смятие	245
§ 2.12. Основные расчетные предпосылки и формулы	245
§ 2.13. Примеры расчета	248
Глава 4. Кручение	250
§ 2.14. Чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге	250
§ 2.15. Крутящий момент. Построение эпюр	252
§ 2.16. Кручение круглого прямого бруса. Основные предпосылки и формулы	254
§ 2.17. Расчеты на прочность и жесткость	259
§ 2.18. Цилиндрические пружины растяжения и сжатия ..	262
Глава 5. Геометрические характеристики плоских сечений	266
§ 2.19. Моменты инерции сечений	266
§ 2.20. Понятие о главных центральных моментах инерции	269
§ 2.21. Осевые моменты инерции простейших сечений	271
Глава 6. Изгиб прямого бруса	278
§ 2.22. Прямой изгиб чистый и поперечный	278
§ 2.23. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов	281
§ 2.24. Основные расчетные предпосылки и формулы при изгибе	292
§ 2.25. Расчеты на прочность	296
§ 2.26. Касательные напряжения при поперечном изгибе	303
§ 2.27. Понятие о линейных и угловых перемещениях при изгибе	308
§ 2.28. Интеграл Мора	310
§ 2.29. Правило Верещагина	313
§ 2.30. Расчеты на жесткость	318
Глава 7. Косой изгиб. Изгиб бруса с растяжением (сжатием)	321
§ 2.31. Косой изгиб	321
§ 2.32. Расчеты бруса большой жесткости при изгибе с растяжением (сжатием)	324
Глава 8. Гипотезы прочности	326
§ 2.33. Понятие о напряженном состоянии в точке упругого тела	326
§ 2.34. Гипотезы прочности и их назначение	329
§ 2.35. Расчеты бруса круглого поперечного сечения при изгибе с кручением	332
Глава 9. Устойчивость сжатых стержней	337
§ 2.36. Устойчивость упругого равновесия. Критическая сила	337
§ 2.37. Формула Эйлера	339
§ 2.38. Критическое напряжение. Пределы применимости формулы Эйлера	341
Список литературы	346
Предметный указатель	347

